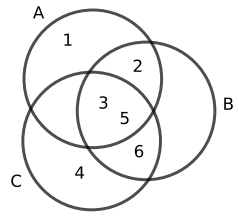
Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 17 januari 2019

1. (a)



Implikationen är ekvivalent med att $A \cap C \subseteq B$, vilket är sant eftersom $A \cap C = \{3, 5\}$.

(b) Kongruensen är ekvivalent med att lösa den diofantiska ekvationen $7x - 2019y = 1$. Vi börjar med Euklides algoritm:

$$2019 = 288 \cdot 7 + 3$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

så $\mathrm{SGD}(2019, 7) = 1$ och vi kan lösa ekvationen genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (2019 - 288 \cdot 7) = 577 \cdot 7 - 2 \cdot 2019$. Vi får att $(x, y) = (577, 2)$ är en partikulärlösning, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = 577 + 2019k \\ y = 2 + 7k \end{cases} \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

Svar: Alla heltal x med $x \equiv 577 \pmod{2019}$.

2. (a) Moduliräkning ger

$$33^{91} + 91^{33} \equiv (-1)^{91} + (91^{16})^2 91 \equiv -1 + 1^2 91 \equiv -1 + 6 = 5 \pmod{17},$$

där vi använt Fermats lilla sats som ger att $a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ om $17 \nmid a$. Den sökta resttermen är alltså 5.

(b) Divisionsalgoritmen ger att $x^{2019} + 1 = k(x)(x^2 + 4) + ax + b$, för något polynom $k(x)$ och $a, b \in \mathbb{R}$. Sätter vi nu $x = 2i$ får vi $-2^{2019} i + 1 = 2ai + b$, så $a = -2^{2018}$ och $b = 1$. Resten är därmed $-2^{2018} x + 1$.

3. (a)
   i. $13 \cdot 48$. Välj en valör för de 4 korten i fyrtalet, och sedan ytterligare ett kort.
   ii. $13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3$. Välj först parets valör, sedan parets 2 kort, sedan 3 andra valörer och slutligen vilket av de 4 korten av respektive valör som väljs.
   iii. $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 44$. Vi väljer valörerna för de två paren, sedan 2 kort av vardera valör, och sist det udda kortet.

(b)

P	Q	$P \Rightarrow \neg Q$	$A : P \wedge Q$	$B : Q \Rightarrow \neg P$	$C : (\neg Q) \Rightarrow P$	$D : \neg P \vee \neg Q$
S	S	F	S	F	S	F
S	F	S	F	S	S	S
F	S	S	F	S	S	S
F	F	S	F	S	F	S

Vi ser från sanningstabellen att utsagan är ekvivalent med B och med D.

4. (a) Med $\overrightarrow{AB} = (3, -2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 3)$ och $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 1)$ har vi att

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

vilket visar att $ABCD$ är en parellellogram. Arean ges av $|\vec{n}|$ där

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \vec{e}_1 \\ -2 & 1 & \vec{e}_2 \\ 2 & 1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-4, -7, -1).$$

Därmed är arean $\sqrt{4^2 + 7^2 + 1^1} = \sqrt{66}$. Vi har att $\vec{n}$ är planets normal, så ekvationen är $-4(x-3) - 7(y-4) - (z-5) = 0$ vilket är ekvivalent med $4x + 7y + z = 45$.

(b) De punkter som projiceras ortogonalt på A ligger på normallinjen genom A. Den kan vi parametrisera genom $(x, y, z) = (3, 4, 5) + t(4, 7, 1)$. Skärningen med xy-planet fås genom att $0 = z = 5 + t$, vilket ger $t = -5$. Detta ger $P = (-17, -31, 0)$.

5. (a) Låt M vara matrisen med vektorernas koordinater som kolonner. Vi får

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{5} & b \\ 1 & 0 & c \\ a & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -a \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{5} & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - ac \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & b \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - ac \end{vmatrix} = \frac{1}{25}(15ac + 20b - 9).$$

Vektorerna bildar en bas när $\det(M) \neq 0$, dvs då $15ac + 20b - 9 \neq 0$.

(b) Vi behöver $0 = \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = \frac{4}{5}a$, så $a = 0$. Då får vi $0 = \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 = c$, så även $c = 0$, och då blir $0 = \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 = \frac{3}{5}(b + \frac{4}{5})$, så $b = -\frac{4}{5}$. Därmed har vi att $\vec{f}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (3/5, 0, 4/5)$ och $\vec{f}_3 = (-4/5, 0, 3/5)$, och man verifierar att $|\vec{f}_i| = 1$ för $i = 1, 2, 3$ så basen är en ON-bas.

[Alternativt kan man ställa upp matrisekvationen $M^T M = E$ och lösa motsvarande ekvationer.]

Med dessa värden på a, b, c får vi $\det(M) = -1$, så basen är negativt orienterad. Byter vi plats på två vektorer får vi en positivt orienterad bas, exempelvis kan vi ta basen $(\vec{f}_2, \vec{f}_1, \vec{f}_3)$.

6. (a) Speglingen uppfyller $S(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $S(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$, $S(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$, så S har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rotationen har matris $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$, så T har matrisen

$$T = SRS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi ser att $T = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) & 0 \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ så T innebär en vridning $90°$ medurs kring z-axeln. Fyra vridningar ger därmed identitetsavbildningen. så vi får

$$T^{50} = (T^4)^{12} T^2 = E^{12} T^2 = T^2$$

vilket motsvarar vridning $180°$ runt z-axeln, som har matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.