Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 22 augusti 2019

1. Vi behöver att $21x - 15 = 57y$ för heltal y, så vi vill lösa den diofantiska ekvationen $21x - 57y = 15$. Vi förkortar med $\mathrm{SGD}(21, 57) = 3$ och får $7x - 19y = 5$. Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 19 &= 2 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Vi kan nu lösa hjälpekvationen $7x - 19y = 1$ genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 3 \cdot (19 - 2 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 19 - 8 \cdot 7$. Vi får att $(x, y) = (-8, -3)$ är en partikulärlösning till hjälpekvationen. Multipliceras denna med 5 fås en partikulärlösning till vår ekvation. Eftersom $\mathrm{SGD}(7, 19) = 1$ så är den allmänna lösningen

$$\begin{cases} x = -40 + 19k \\ y = -15 + 7k \end{cases} \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

Eftersom $-40 \equiv 17 \pmod{19}$ är lösningarna $x = 17 + 19k$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Den andra kongruensen motsvarar den diofantiska ekvationen $21x - 57y = 5$ som saknar lösning eftersom vänsterledet är delbart med 3, men inte högerledet.

2. (a) Vi skall lösa $z^6 = 64$. Ansätter vi lösningen på polär form $z = re^{\theta i}$ fås $r^6 e^{6\theta i} = 64e^{0i}$. Vi behöver alltså $r^6 = 64$ och $6\theta = 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Vilket ger $r = 2$ och $\theta = \frac{\pi}{3} n$. Sätter vi in $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ fås lösningarna $z = \pm 2$, och $z = \pm 1 \pm \sqrt{3}\, i$.

   (b) Vi skall välja 4 siffror, där den första (från vänster) inte får vara 0, och den fjärde måste tillhöra $\{1, 3, 7, 9\}$, så det blir $4 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 3600$ olika möjligheter.

   I andra fallet, om man väljer siffrorna i ordningen 4:e, 1:a, 2:a, 3:e ser vi att det blir $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$ olika möjligheter.

3. Låt A vara ekvationssystemets koefficientmatris. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 4-a & 2 \\ 0 & 3-a & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-a & 2 \\ 3-a & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (4-a)(a-1) - 2(3-a) = -(a-2)(a-5) \end{aligned}$$

så $\det(A) = 0$ för $a = 2$ eller $a = 5$. För dessa a kan ekvationssystemet har ingen eller oändligt många lösningar. Vi undersöker nu dessa fall närmre. För $a = 2$ fås utökade koefficientmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

vilket ger ett lösbart ekvationssystem (t.ex. $(x, y, z) = (0, 0, 1)$). För $a = 5$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

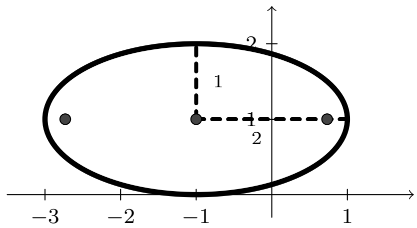
så lösning saknas. Svar: Ingen lösning för $a = 5$, oändligt många lösningar för $a = 2$, och unik lösning för alla andra a.

4. (a) Kvadreras villkoren får vi $|\vec{u}|^2 = 4$, $|\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 7$ samt $|\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 19$. Detta ger direkt $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$ och $|\vec{v}|^2 = 9$, så $|\vec{v}| = 3$ och den sökta vinkeln θ fås av $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2}$, vilket ger $\theta = 2\pi/3$.

(b) Efter kvadratkomplettering får vi den normaliserade ekvationen

$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$$

Från detta ser vi direkt att medelpunkten är $(-1, 1)$, halvaxeln i x-led är 2, och halvaxeln i y-led är 1. Vidare, om storaxeln är a $(= 2)$, lillaxeln är b $(= 1)$, och avståndet från medelpunkten till brännpunkterna är c gäller $a^2 = b^2 + c^2$. Vi får därmed att $c = \sqrt{3}$, så brännpunkterna är $(-1 \pm \sqrt{3}, 1)$. Nu kan vi skissa grafen:



5. (a) Löser vi ekvationssystemet med planets ekvationer får vi att L ges av $(x, y, z) = (3, -1, 0) + t(2, -1, 1)$, för $t \in \mathbb{R}$. Alltså är $Q = (3, -1, 0)$ en punkt på L, och $\vec{u} = (2, -1, 1)$ en riktningsvektor. Vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = (-2, 2, 1)$ ligger i planet, så vi får en normalvektor genom

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & \vec{e}_1 \\ -1 & 2 & \vec{e}_2 \\ 1 & 1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (-3, -4, 2).$$

Planets ekvationen är därför $-4(x-1) - 3(y-1) + 2(z-1) = 0$, dvs $3x + 4y - 2z = 5$.

(b) Den närmaste punkten R bestäms, genom ortogonal projektion på linjen, av

$$\overrightarrow{QR} = \mathrm{Proj}_{\vec{u}}\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{-5}{6}\vec{u} = \left(-\frac{10}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right),$$

så $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$ ger att punkten $R = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$.

6. (a) Planets normalvektor är $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Geometriskt ser vi att projektionen $P(\vec{v})$ av en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ ges av

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - \mathrm{Proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \vec{v} - \frac{x+y-z}{3}\vec{n}.$$

Detta ger $S(\vec{v}) = \frac{1}{3}(2x - y + z, -x + 2y + z, x + y + 2z)$, från vilket vi får att S har matrisen $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Speglingen S har matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vi får att $T = S \circ P$ har matrisen $C = BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Om en linjär avbildning T är en projektion kommer $T \circ T = T$, men matrisen C för vår avbildning T uppfyller inte $C^2 = C$ så T kan inte vara en projektion.