

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. 15 poäng ger säkert godkänt.

1. a) Bestäm alla punkter  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , sådana att  $x, y$  är positiva heltal som uppfyller ekvationen

$$13x + 23y = 1465.$$

3 p

- b) Bestäm alla punkter  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , sådana att  $x, y$  är positiva heltal som uppfyller ekvationen

$$13x^2 + 23y^2 = 1465.$$

2 p

2. Vi definierar tre plan  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  som beror av parametern  $a$  genom följande ekvationer på normalform:  $\Pi_1 : x + y + az = 1$ ,  $\Pi_2 : ax - 3y + 4z = -2$ ,  $\Pi_3 : 2x - y + 4z = a$ . För vilka värden på det reella talet  $a$  saknar de tre planen gemensam punkt och för vilka värden på  $a$  finns det oändligt många skärningspunkter? Ange också skärningsmängden om denna blir oändlig för något  $a$ .

5 p

3. Betrakta en regelbunden 12-hörning i planet. Vi kan nu konstruera trianglar genom att välja ut tre olika hörn i denna och låta dessa bilda hörnen i en ny triangel. Observera att två trianglar räknas som identiska om de har samma hörn, oberoende av ordningen på hörnen.

- a) Hur många sådana trianglar är möjliga?

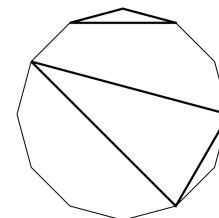
2 p

- b) Hur många sådana liksidiga trianglar är möjliga?

1 p

- c) Hur många sådana likbenta trianglar är möjliga?

2 p



Bilden visar exempel på två likbenta trianglar. Svara på uträknad form.

4. Polynomet  $p(z) = z^4 - 9z^2 + 12z + 10$  har nollstället  $z = 2 + i$ . Bestäm övriga (komplexa) nollställen.

5 p

5. a) Bestäm matriserna för de tre speglingsavbildningarna som speglar rummet i planen  $x + y = 0$ ,  $y + z = 0$  respektive  $x + z = 0$ . (ON-system)

3 p

- b) Var hamnar punkten  $(x, y, z)$  om vi först speglar den i planet  $x + y = 0$ , sedan i planet  $y + z = 0$  och till sist i planet  $x + z = 0$ ? Om vi upprepar proceduren ytterligare en gång blir den sammansatta avbildningen en spegling i en linje. Vilken?

2 p

6. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Vad blir determinanten för  $A^n$  ( $n$  positivt heltal)?

1 p

- b) Gissa en formel för  $A^n$  ( $n$  positivt heltal).

1 p

- c) Bevisa formeln i b) med matematisk induktion.

3 p

Skrivningsåterlämning den 9 december kl 12.15 utanför sal 15, därefter i rum 204, hus 6.