Lösningar till tentamen

Algebra, Matematik1,
200115.

1.a) Vi börjar med att notera att $10 \equiv 3 \pmod 7$, vilket ger $10^{1000} \equiv 3^{1000} \pmod 7$. Det följer att $3^{1000} = 9^{500} \equiv 2^{500} \pmod 7$, och eftersom $2^{500} = (2^3)^{166} \cdot 2^2 = 8^{166} \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod 7$ så följer att resten vid division med 7 blir 4.

b) Eftersom det bara handlar om 13 möjliga tal kan vi prova oss fram: $3^0 \equiv 1, 3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 = 27 \equiv 1, 3^4 = 81 \equiv 3, \ldots$. Vi ser att mönstret nu kommer att upprepa sig och att resterna när x går från 0 till 12 blir

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3^x	1	3	9	1	3	9	1	3	9	1	3	9	1

Tydligen ges lösningarna till ekvationen av $x = 2, 5, 8, 11$.

2.a) Riktningsvektorerna för L_1, L_2 och L_3 är $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$ och $v_3 = (1, 1, a)$. Villkoret är ekvivalent med att dessa tre vektorer ska vara parallella, vilket bara inträffar om $a = 1$.

2.b) Eftersom alla tre linjerna går genom origo så ligger de i samma plan om och endast om v_1, v_2 och v_3 ligger i samma plan, vilket i sin tur inträffar om och endast om determinanten med v_1, v_2 och v_3 som kolonner (eller rader) är lika med noll. En direkt uträkning ger

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ (a+2) & (a+2) & (a+2) \end{vmatrix}$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2.$$

Vi ser att vi, förutom lösningen $a = 1$, även får lösningen $a = -2$.

3. Vi ser från figuren att

$$f_1 = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = e_1 + e_2,$$

$$f_2 = \overline{AF} = \overline{AB} + \overline{AE} = e_1 + e_3,$$
$$f_3 = \overline{AH} = \overline{AD} + \overline{AE} = e_2 + e_3.$$

Dessa samband kan skrivas

$$\begin{cases} f_1 = & e_1 & +e_2, & \\ f_2 = & e_1 & & +e_3, \\ f_3 = & & e_2 & +e_3. \end{cases}$$

Vi kan nu antingen lösa ut e_1, e_2, e_3 direkt eller att räkna med matriser. Vi väljer att skriva sambanden på utvidgad matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

vilket även kan skrivas som

$$\begin{cases} e_1 = & \frac{1}{2}f_1 & +\frac{1}{2}f_2 & -\frac{1}{2}f_3, \\ e_2 = & \frac{1}{2}f_1 & -\frac{1}{2}f_2 & +\frac{1}{2}f_3, \\ e_3 = & -\frac{1}{2}f_1 & +\frac{1}{2}f_2 & +\frac{1}{2}f_3. \end{cases}$$

Vi kan nu beräkna u:s koordinater så här: $u = 2e_1 + 3e_2 - e_3 = 2(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3) + 3(\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3) - (-\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3) = 3f_1 - f_2$. u:s koordinater i basen f_1, f_2, f_3 är alltså $(3, -1, 0)$.

4.a) Bokstäverna A, B, C, D, E kan permuteras på $5! = 120$ olika sätt.

b) Antalet ord som inte innehåller bokstavsföljden ABC kan fås genom att från de 120 orden i a) subtrahera antalet ord som gör det. Ord som innehåller följden ABC kan uppfattas som permutationer av de tre symbolerna ABC, D och E. Sådana finns det tydligen $3! = 6$ stycken, dvs svaret blir $120 - 6 = 114$.

c) I detta fall fall ska vi från 120 subtrahera både antalet ord som innehåller

ABC (6 stycken) och antalet ord som innehåller CDE (också 6 stycken av samma skäl). Men om vi subtraherar $2 \cdot 6 = 12$ så har vi subtraherat antalet ord som innehåller både ABC och CDE två gånger, så det antal måste i slutändan adderas igen. I vårt fall finns det bara ett sådant ord, nämligen $ABCDE$, så rätt svar blir $120 - 6 - 6 + 1 = 109$.

5. Vi börjar med att faktorisera med hjälp av konjugatregeln:

$$p(x) = x^8 - 16 = (x^4 - 4)(x^4 + 4) =$$
$$(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 4) =$$
$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)(x^4 + 4).$$

Av de fyra faktorerna är de tre första uppenbarligen irreducibla över de reellatalen. För att faktorisera den fjärde löser vi den binomiska ekvationen $x^4 = -4$ som har lösningarna $x_k = 4^{1/4} e^{i(\pi/4 + k\cdot\pi/2)}$, där $k = 0, 1, 2, 3$, vilket efter förenkling ger de komplexa rötterna $1 \pm i$ och $-1 \pm i$. Faktorsatsen ger nu faktoriseringen $x^4 + 4 =$

$$(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i) =$$
$$((x - 1)^2 + 1)((x + 1)^2 + 1) =$$
$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Insatt i faktoriseringen ovan får vi nu slutligen $p(x) =$

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

6.a) Det är känt från kursen att projektioner och speglingar har symmetriska matriser, med rotationer normalt inte har det. Redan denna information räcker för att visa att det måste vara A_1 som är rotationen. Vidare vet vi att en projektion på ett plan eller en linje alltid har determinant lika med noll, medan en spegling i ett plan eller en punkt har determinant -1 och en spegling i en linje har determinant $+1$. Direkt beräkning (t ex med Sarrus regel) visar att

$$\det(A_2) = \frac{1}{729} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{729}(200 - 16 - 16 - 20 - 20 - 128) = 0$$

och

$$\det(A_3) = \frac{1}{729} \begin{vmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & -7 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{729}(-448-16-16+7-128-128) = -1,$$

vilket alltså betyder att det är A_2 som är projektionen och A_3 som är speglingen.

b) Rotationen runt z-axeln uppfyller $R(e_x) = e_y, R(e_y) = -e_x, R(e_z) = e_z$, vilket ger matrisen

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen i planet $x + z = 0$ uppfyller $S(e_x) = -e_z.S(e_y) = e_y, S(e_z) = -e_x$ vilket ger matrisen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den sammantagna effekten av dessa operationer (i den givna ordningen) ges av matrisen $A = SR =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

/Martin Tamm/200115