Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 18 januari 2021

1. (a) Vi har $\sqrt[n]{e^{2n} + 2^{3n}} = 8e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{e^2}{8}\right)^n\right)}$, och eftersom $0 < \frac{e^2}{8} < 1$ går båda faktorerna i exponenten mot 0, så är $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{2n} + 2^{3n}} = 8e^0 = 8$.

   (b) Med standardutvecklingarna $\ln(1 + t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ och $\sin(t) = t - t^3/3! + O(t^5)$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{2\ln(1+x^3) - \ln(1+2x^3)}{3\sin(x^2) - \sin(3x^2)} = \frac{2(x^3 - x^6/2 + +O(x^9)) - (2x^3 - 4x^6/2 + O(x^9))}{3(x^2 - x^6/6 + O(x^{10})) - (3x^2 - 27x^6/6 + O(x^{10}))}$$
$$= \frac{z^6 + O(x^9)}{4x^6 + O(x^{10})} = \frac{1 + O(x^3)}{4 + O(x^4)} \to \frac{1}{4}$$

   då $x \to 0$.

2. Vi har att $f(x)$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så de enda möjliga asymptoterna är sneda. När $x \to \infty$ växer funktionen fortare än en exponentialfunktion, så asymptot saknas åt det hållet. Vi får dock att

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 e^x = [t = -x] = \lim_{t\to\infty} \frac{-t^3}{e^t} = 0,$$

så $y = 0$ är en asymptot då $x \to -\infty$. Vi får vidare, efter förenkling, att

$$f'(x) = x^2(x+3)e^x, \qquad f''(x) = x(x^2 + 6x + 6)e^x,$$

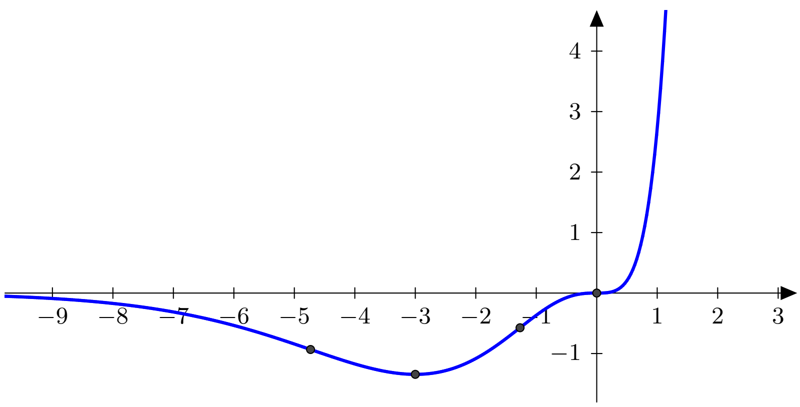
så $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och för $x = -3$, och $f''(x) = 0$ för $x = 0$ och då $x = -3 \pm \sqrt{3}$. Vi gör en teckentabell

x		$-3-\sqrt{3}$		-3		$-3-\sqrt{3}$		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\left(\frac{3}{e}\right)^3$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

Från teckentabellen ser vi att funktionen har precis ett lokalt extremvärde, ett lokalt minimum vid $x = -3$ som även är globalt minimum. Globalt maximum saknas eftersom funktionen är obegränsad.

Vidare har vi 3 inflektionspunkter, och funktionen är konvex på intervallen $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$ och $[0, \infty[$, samt konkav på $]-\infty, -3-\sqrt{3}]$ och på $[-3-\sqrt{3}, 0]$.

Vi har nu tillräcklig information för att kunna rita en skiss av grafen:



3. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y) - 6y^2, \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y) - 12xy. \end{cases}$$

   Subtraherar vi ekvationerna från varandra får vi $6y^2 = 12xy$, vilket ger att $y = 0$ eller $y = 2x$. Om $y = 0$ får vi direkt från första ekvationen att $x = 0$, men $(x, y) = (0, 0)$ är ej en inre punkt till området. Om $y = 2x$ får vi efter insättning $6x - 24x^2 = 0$, så $x = 0$ eller $x = 1/4$. Så vi hittar en enda inre stationärpunkt $(1/4, 1/2)$, som därmed är en kandidat.

   Området är en triangel, och vi undersöker nu om det finns stationära punkter när funktionen restingeras till de tre linjestycken randen består av.

   Längs randen $y = 0$, $0 \le x \le 3$ får vi $h_1(t) = f(t, 0) = t^2$. Vi har $h_1'(t) > 0$ för $0 < t < 3$, så inga stationära punkter finns.

   Längs randen $x = 0$, $0 \le y \le 3$ får vi $h_2(t) = f(0, t) = t^2$. Vi har $h_2'(t) > 0$ för $0 < t < 3$, så inga stationära punkter finns heller här.

   Vi parametriserar den tredje sidan

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 3.$$

   Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h_3(t) = f(3 - t, t) = 9 - 6(3 - t)t^2 = 9 - 18t^2 + 6t^3.$$

   Vi får $h_3'(t) = 18t(t - 2)$ så $h'(t) = 0$ om och endast om $t = 0$ eller $t = 2$, varav bara den senare är aktuell (uppfyller $0 < t < 3$), så vi får kantidatpunkten $(1, 2)$.

   Vi jämför funktionsvärdena i de två funna punkterna, och de tre hörnen:

(x, y)	$(0, 0)$	$(3, 0)$	$(0, 3)$	$(1, 2)$	$(1/4, 1/2)$
$f(x, y)$	0	9	9	-15	$3/16$

   så minsta värdet är $f(1, 2) = -15$ och det största $f(0, 3) = f(3, 0) = 9$.

4. Om vi inför de nya koordinaterna $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ motsvaras området D av området $E = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3,\ -1 \le v \le 1\}$. Vi får att $\begin{cases} x = u/2 + v/2 \\ y = u/2 - v/2 \end{cases}$ så variabelbytets funktionaldeterminant är

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

   så

$$\iint_D (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dxdy = \iint_E ue^{uv} |J(u, v)|\, dudv = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\int_{-1}^1 ue^{uv}\, dv \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \left[e^{uv} \right]_{v=-1}^{v=1} du = \frac{1}{2} \int_0^3 (e^u - e^{-u})\, du = \frac{1}{2} \left[e^u + e^{-u} \right]_{u=o}^{u=3} = \frac{e^3 + e^{-3}}{2} - 1.$$

5. (a) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 3r + 2 = 0$, med lösningar $r = 1$ och $r = 2$, så $y_h = Ae^x + Be^{2x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = ze^x$, så $y_p' = (z' + z)e^x$ och $y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x$ så vi får $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = (z'' + 2z' + z)e^x - 3(z' + z)e^x + 2ze^x = (z'' - z')e^x$ vilket skall vara lika med e^x, vilket betyder att $z'' - z' = 1$. Vi ser direkt att $z = -x$ är en lösning, så $y_p = -xe^x$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = -xe^x + Ae^x + Be^{2x}.$$

Detta ger $y' = -(x + 1)e^x + Ae^x + 2Be^{2x}$, så begynnelsevillkoren blir $y(0) = A + B = 0$ och $y'(0) = -1 + A + 2B = 0$, så $B = 1$ och $A = -1$. Svaret är således att $y(x) = -(x + 1)e^x + e^{2x}$.

(b) Vi skriver om den linjära differentialekvationen som $y' - \frac{2}{x}y = 2x$, och får den integrerande faktorn $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$. Multipliceras ekvationen med denna faktor fås

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x}.$$

Integreras båda sidor för vi $y\frac{1}{x^2} = 2\ln(x) + C$, så $y = Cx^2 + 2x^2 \ln x$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu att $C = 1$, så $y(x) = x^2 + 2x^2 \ln x$.

6. Vi sätter $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^2 - 4x + 5$. Tangenten till grafen $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ ges av $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ vilket efter förenkling blir

$$y = 2ax - a^2.$$

Tangenten till grafen $y = g(x)$ i en punkt $(b, g(b))$ ges av $y - g(b) = g'(b)(x - b)$ vilket efter förenkling blir

$$y = (2b - 4)x - b^2 + 5.$$

Dessa två tangenter sammanfaller om och endast om

$$\begin{cases} 2a = 2b - 4 \\ -a^2 = -b^2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ a^2 = b^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ b^2 - 4b + 4 = b^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 9/4. \end{cases}$$

Det finns alltså precis en gemensam tangent och den har ekvationen $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{16}$.