**Algebra och Kombinatorik**
**HT 2018**
**Tentamen**
**14 januari 2019**
**9:00-14:00**

---

Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
Varje korrekt löst uppgift ger fyra poäng. Lycka till!

1. För vilka av nedanstående listor av tal går det att konstruera en graf med fem noder, sådan att graderna av de fem noderna är precis de givna talen? Svara genom att rita en sådan graf, eller argumentera varför en sådan graf inte kan existera.

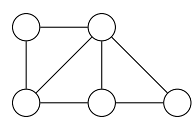
   (i) 3, 3, 2, 2, 1

   (ii) 4, 3, 3, 2, 2

   (iii) 4, 4, 3, 2, 1

   *Lösning.* (i) Det är känt att i en graf $G = (V, E)$ så gäller relationen $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$. Speciellt är summan av alla grader ett jämnt tal. Alltså kan ingen sådan graf existera, eftersom summan av graderna i detta fall är 11.

   (ii) Ja, det är möjligt:

   (iii) Ingen sådan graf existerar. Vi har två noder av grad 4, och dessa måste därför vara granne med varje annan nod. Så varje nod måste ha minst två grannar, vilket säger emot att vi ska ha en nod av grad 1.

2. Hitta alla fem lösningarna till ekvationen $y^2 = x^3 + 3$ i ringen $\mathbb{Z}/5$.

   *Lösning.* Eftersom vi bara har 5 element att testa, kan vi ganska snabbt räkna ut alla värden av de två funktionerna $x \mapsto x^3 + 3$ och $y \mapsto y^2$:

| $x$ | $x^3+3$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 4 | 2 |

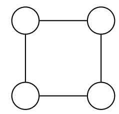
| $y$ | $y^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |
| 4 | 1 |

   Från dessa tabeller kan vi lätt läsa av för vilka värden av $(x, y)$ som vi har $y^2 = x^3+3$. Vi finner de fem lösningarna

$$(x, y) \quad = \quad (3, 0), \quad (1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 1), \quad (2, 4).$$

3. Betrakta den fyrkantiga grafen som visas i bilden nedan. Låt $p(n)$ vara antalet färgningar av grafen med $n$ färger (d.v.s. vi färgar de fyra noderna på ett sådant sätt att två noder som

förbinds av en kant inte har samma färg). Funktionen $p(n)$ är ett polynom — räkna ut detta polynomet.



*Lösning.* Vi använder inklusion-exklusion. Numrera kanterna som $1, 2, 3, 4$. För varje delmängd $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ låt $N_S$ vara antalet färgningar av hörnen med $n$ färger, sådana att noderna som förbinds av kanter i $S$ har fått samma färg.

Om $S = \emptyset$ betraktar vi godtyckliga färgningar av de fyra noderna, så $N_\emptyset = n^4$.

Om $|S| = 1$ ska två givna noder färgas likadant, men de andra två kan färgas godtyckligt. I detta fallet har vi $N_S = n^3$.

Om $|S| = 2$ har vi antingen ett par av noder som ska färgas likadant, och ett annat par av noder som också ska färgas likadant. Eller så förbinder de två kanterna tre av noderna, så att dessa tre ska färgas likadant och den fjärde kan färgas godtyckligt. Oavsett ser vi att $N_S = n^2$.

Om $|S| = 3$ ska noderna längs tre stycken kanter färgas likadant, och det är klart att i detta fall måste faktiskt alla fyra noderna få samma färg. Så $N_S = n$ i detta fall.

Om $|S| = 4$ måste också alla fyra noderna få samma färg, så $N_S = n$.

Med inklusion-exklusionsprincipen ser vi därmed att svaret ges av

$$n^4 - \binom{4}{1}n^3 + \binom{4}{2}n^2 - \binom{4}{3}n + \binom{4}{4}n = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 3n.$$

*Alternativ lösning.* Numrera noderna medsols som $A$, $B$, $C$, $D$, så att noderna $A$ och $C$ är mittemot varandra. Vi delar in i två fall:

Fall 1: $A$ och $C$ har samma färg. I detta fall kan färgen till $A$ och $C$ väljas på $n$ sätt. Det enda villkoret på färgningen av $B$ och $D$ är sedan att ingen av dem ska få samma färg som den som $A$ och $C$ fick, så vi kan färga $B$ och $D$ på tillsammans $(n-1)^2$ sätt.

Fall 2: $A$ och $C$ har olika färg. I detta fall kan färgerna till $A$ och $C$ väljas på $n(n-1)$ sätt. Det enda villkoret på färgningen av $B$ och $D$ är sedan att ingen av dem ska få samma färg som de två som $A$ och $C$ fick, så vi kan färga $B$ och $D$ på tillsammans $(n-2)^2$ sätt.

Totalt får vi därmed

$$n(n-1)^2 + n(n-1)(n-2)^2 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 3n$$

färgningar.

4. Låt $G$ vara gruppen av inverterbara element i $\mathbb{Z}/8$, och låt $X \subset \mathbb{Z}/8$ vara mängden av icke-inverterbara element. Gruppen $G$ verkar på $X \times X$ genom

$$g \cdot (x, y) = (gx, gy).$$

   (i) Skriv ned antalet fixpunkter för varje element i gruppen.

   (ii) Hur många banor har denna verkan?

*Lösning.* Vi har $G = \{1, 3, 5, 7\}$ och $X = \{0, 2, 4, 8\}$. Vi räknar ut alla produkterna $gx$, för $g \in G$ och $x \in X$:

| | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 0 | 6 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 7 | 0 | 6 | 4 | 2 |

Vi ser i tabellen att elementen $1, 3 \in G$ har fyra fixpunkter i $X$. Därmed har de $4^2 = 16$ fixpunkter i $X \times X$. Elementen $3, 7 \in G$ har två fixpunkter i $X$, och därmed $2^2 = 4$ fixpunkter i $X \times X$. Detta besvarar (i).

För (ii) använder vi Burnsides lemma. Vi ser att det finns

$$\frac{1}{4}(16 + 4 + 16 + 4) = 10$$

banor för denna gruppverkan.

5. Låt $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ vara en delmängd med 51 element. Visa att $X$ innehåller två direkt efterföljande element, d.v.s. att det finns ett tal $n$ sådant att $n \in X$ och $(n + 1) \in X$.

   *Lösning.* Betrakta följande partition av $\{1, 2, \ldots, 100\}$:

   $$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \ldots \cup \{99, 100\}.$$

   Detta är en partition i exakt 50 stycken disjunkta delmängder. Eftersom $X$ består av 51 element måste en av mängderna i partitionen innehålla två element av $X$, enligt lådprincipen. Det följer att $X$ innehåller två direkt efterföljande element.

6. Låt $G$ vara en ändlig grupp med $n$ element, och tag $a \in \mathbb{Z}$ med $\gcd(a, n) = 1$. Visa att $g \mapsto g^a$ är en bijektion från $G$ till $G$. (Ledning: använd att $g^n = e$, och att ekvationen $ax + ny = 1$ har en lösning.)

   *Lösning.* Låt $x, y \in \mathbb{Z}$ lösa ekvationen $ax + ny = 1$. Jag påstår att funktionen $g \mapsto g^x$ är en invers till funktionen $g \mapsto g^a$, så att bägge funktionerna är bijektioner.

   Vi har nämligen att

   $$(g^a)^x = g^{ax} = g^{1-ny} = g \cdot g^{-ny} = g \cdot (g^n)^{-y} = g,$$

   där vi i sista steget använde att $g^n = e$. På samma sätt är såklart $(g^x)^a = g$.