

Tentamen i Algebra och Kombinatorik

Ange dina svar tydligt och motivera dem noggrant. Alla steg i lösningen ska redovisas.
Tillåtna hjälpmedel: Kurslitteratur och egna anteckningar.

1. Låt C vara koden som definieras av check-matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (1p) Hur många ord innehåller C ?
(b) (1p) Vilka av orden 011110100, 101100100, 111100000 och 111111111 tillhör C ?
(c) (2p) Hur många fel rättar C ? (Kom ihåg att förklara varför just detta antal fel kan rättas, men inte fler.)
(d) (1p) Om några av orden i deluppgift (b) inte tillhör C : Rätta de som kan rättas.

2. Låt σ vara permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 8 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) (2p) Skriv σ och σ^{-1} som produkter av transpositioner.
(b) (1p) Är σ^3 jämn eller udda? Är $(\sigma^{-1})^3$ jämn eller udda?
(c) (2p) Finns det något k så att $\sigma^k(1) = 5$? Ange i så fall ett sådant k .

3. Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{16}), \cdot)$, där $U(\mathbb{Z}_{16})$ står för mängden av inverterbara element i \mathbb{Z}_{16} .

- (a) (1p) Lista alla element i G .
(b) (1p) Är G cyklisk?
(c) (3p) Vilka möjliga storlekar finns det för en delgrupp av G ? Ge exempel på delgrupper av varje möjlig storlek.

4. (5p) Hur många ord med nio bokstäver kan vi bilda med hjälp av de tio bokstäverna A A A B N N R S T U, om orden inte får innehålla delorden BANAN eller ANANAS? (Svaret får uttryckas med hjälp av addition, subtraktion, multiplikation, division och faktultet.)

5. (5p) En karusell med åtta säten ska målas om. Fyra av sätena ska målas svarta och fyra vita. På hur många sätt kan vi måla karusellen? Två målningar betraktas som samma, om vi kan få den ena från den andra genom att snurra på karusellen.

6. (a) (2p) Finns det ett $c \in \mathbb{Z}_7$ så att

$$(x+c)(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+1) = (x^3 - x^2 - 3x - 1)(x^3 + x + 1) \text{ i } \mathbb{Z}_7[x]?$$

- (b) (3p) Finns det ett $c \in \mathbb{Z}_{12}$ så att $(x+c)(x+2) = (x-4)^2$ i $\mathbb{Z}_{12}[x]$?