STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: H. Granath

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
3 februari 2021, kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: kursbok och anteckningar. Alla svar skall motiveras!

Uppgift 1. Följande matris bestämmer en linjär kod

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skriv ned alla kodord som bestäms av matrisen (man kan få delpoäng för exempel på kodord).

Lösning. Radreducering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

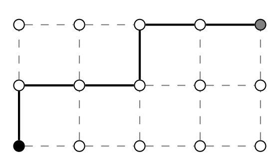
De sista två kolonnerna blir parameterkolonner, och lösningarna blir

$$\mathtt{00000}, \mathtt{10110}, \mathtt{01101}, \mathtt{11011}.$$

Uppgift 2. Hur många moniska polynom i $\mathbb{Z}_7[x]$ av grad 2 finns det? Hur många moniska polynom i $\mathbb{Z}_7[x]$ av grad 2 finns det som är reducibla?

Lösning. (a) Ett moniskt polynom av grad 2 i $\mathbb{Z}_7[x]$ är på formen $x^2 + ax + b$, där $a, b \in \mathbb{Z}_7$. Detta ger $7^2 = 49$ polynom. (b) Ett reducbelt polynom kan skrivas som $(x + p)(x + q)$, men ordningen på p och q spelar ingen roll. Det finns 7 polynom med ett dubbelt nollställe, och $\binom{7}{2} = 21$ polynom med två olika nollställen. Svaret blir då 28.

Uppgift 3. Låt $H_{3,n}$ vara den $3 \times n$ stora rutnätsgrafen. Till exempel, $H_{3,5}$ är ritad nedan:



Antag att du börjar i nedre vänstra hörnet, och skapar en stig genom att antingen gå uppåt eller åt höger i varje steg, tills du når det övre högra hörnet. En sådan stig har ritats i figuren.

a) (2p) Visa att totala antalet "upp-höger" stigar som räknas av $H_{3,n}$ ges av $\binom{n+1}{2}$.

b) (3p) Låt a_n vara antalet ord av längd $n-1$ som består av siffrorna $0, 1, 2$, där siffrorna sorterats i ökande ordning i ordet. Till exempel, `00112` bidrar till a_6. Visa att $a_n = \binom{n+1}{2}$.

Lösning. En stig innehåller exakt $n+1$ steg totalt, varav två uppsteg. Detta ger $\binom{n+1}{2}$ antal stigar, då vi måste bestämma var upp-stegen skall vara.

Stigerna ovan har alltid $n-1$ högersteg, fördelade på y-koordinaterna 0, 1 eller 2. En stig ger alltså upphov till ett ord bestående av siffrorna 0, 1 och 2 sorterade i ökande ordning. Stigen i formuleringen är t.ex `1122`, då det finns två högersteg med y-koordinat 1, samt 2 högersteg med y-koordinat 2. Vi har alltså en bijektion mellan stigar och ord, så deras antal måste vara samma.

Alternativt, så kan man använda sig av "stars-and-bars"-metoden (oordnat urval med repetition) och räkna sorterade ord, se Sats 11.2 i Biggs.

Uppgift 4. a) Ge exempel på två permutationer σ, π i S_6 som kommuterar, och så att minsta permutationsgruppen som innehåller både σ och π har 8 element.

b) Finns det en surjektiv homomorfi ϕ från S_7 till S_2?

Lösning. a) Vi kan ta t.ex $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5)(6)$ och $\pi = (1)(2)(3)(4)(5\ 6)$. Gruppen består av permutationerna $\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \pi, \pi\sigma, \pi\sigma^2, \pi\sigma^3\}$.
b) Ja, om $\pi \in S_7$ är udda, låter vi $\phi(\pi) = (1\ 2)$, annars sätter vi $\phi(\pi) = (1)(2)$.

Uppgift 5. Låt $K_{m,n}$ med $m, n \geq 1$ beteckna den kompletta bipartita grafen med m hörn i den ena delen, och n hörn i den andra, dvs. $K_{m,n} = (V, E)$ där

$$V = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n\} \quad E = \{(v_i, w_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Avgör för vilka par (m, n) som $K_{m,n}$ har

(a) en Eulerkrets

(b) en Eulerstig.

Lösning. Vi noterar att $K_{m,n}$ är sammanhängande då $m, n \geq 1$, eftersom kanterna mellan v_i och w_j alltid ingår, samt att v_i kan nå v_j via w_1.

(a) Grafen har en Eulerkrets om (och endast om) alla gradtal på hörnen är jämna. Graderna på hörnen i $K_{m,n}$ som förekommer är n och m, så både m och n måste vara jämna.

(b) För att vi ska ha en Eulerstig (som inte täckts av (a)), måste exakt två hörn vara udda. Vi kan anta att minst en av m och n är udda. Om båda är udda, måste vi ha $(m, n) = (1, 1)$, eftersom annars finns för många hörn av udda grad.

Vi har också fallen $(m, n) = (\text{udda}, 2)$ och $(m, n) = (2, \text{udda})$, eftersom det då finns exakt två hörn med udda grad.

Uppgift 6. Låt G vara en ändlig grupp som verkar på en mängd X. Antag att $g \in G$ och att $k \in \mathbb{N}$.

(1p) Visa att $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(g^k)$.

(4p) Visa att $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(g^k)$ om g och g^k har samma ordning.

Lösning. Vi har att $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$. Notera nu att

$$gx = x \implies g^k x = x.$$

För (b), antag att g har ordning n, så g genererar en cyklisk delgrupp C av ordning n. Eftersom g och g^k har samma ordning, så genererar g^k också C. Detta medför att det finns ett tal m, så att $(g^k)^m = g$. Vi har att $x \in \mathrm{Fix}(g^k) \iff g^k x = x$, och detta ger att $(g^k)^m x = x$, eftersom multiplikation med g^k på x fixerar x. Men då har vi att $g^{km} x = x$, så $gx = x$, eftersom $(g^k)^m = g$. Således, $x \in \mathrm{Fix}(g)$ och vi är klara.