MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 17/4 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. (a) *Bestäm gränsvärdet* $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (b) *Bestäm gränsvärdet* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (c) *Bestäm gränsvärdet* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (d) *För vilket värde på c är funktionen*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   kontinuerlig? *1 p*

   Motivera dina svar!

   (a) $\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \sin(xy) \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$ är en begränsad funktion (nämligen $\sin(xy)$) gånger en funktion som går mot 0 (nämligen $\frac{1}{x^2+y^2}$) då $x^2+y^2 \to \infty$. Alltså är $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = 0$.

   (b) Om vi sätter $x = y$ får vi $\frac{\sin(x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0$,
   men om vi sätter $x = 0$ så får vi $\frac{\sin(0)}{y^2} = 0$. Alltså kan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ inte finnas.

   (c) Om vi nu försöker på samma sätt som i (b) skulle vi få samma gränsvärde i båda fall. Vi kollar därför med polära koordinater och får $\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2}$ som för båda $\cos\varphi = 0$ eller $\sin\varphi = 0$ är lika med noll. Annars kan vi förlänga och får

$$\frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2} = \frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi} \cdot \cos^2\varphi\sin\varphi \cdot r.$$

   När $r \to 0^+$ går första faktorn mot 1 och är därmed som andra faktorn begränsad, medan tredje faktorn, nämligen r, går mot 0, alltså är gränsvärdet i alla fall $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$.

   (d) $c = 0$, eftersom endast då gäller $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$.

   Svar: (a) 0 (b) existerar ej (c) 0 (d) $c = 0$.

2. *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* *6 p*

$$F(x,y) = 3x^4 - 6x^2y + 2y^3 + 7$$

   och avgör deras karaktär.

   Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} F'_x &= \ldots = 12x(x^2-y) = 0 \\ F'_y &= \ldots = 6(-x^2+y^2) = 0 \end{aligned}$$

   Den första ekvationen har två olika fall, antingen $x = 0$ eller $x^2 = y$. I första fallet, $x = 0$ ger den andra ekvationen även $y = 0$. I andra fallet, $x^2 = y$, blir den andra ekvationen

$y^2 - y = 0$. Det ger oss $y = 1$ och $y = 0$. Och därmed har vi hittat tre stationära punkter, nämligen $(0,0)$ och $(\pm 1, 1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$F''_{xx} = 36x^2 - 12y \qquad F''_{xy} = -12x \qquad F''_{yy} = 12y.$$

För punkten $(1,1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 24h^2 - 24hk + 12k^2 = 24(h - k/2)^2 + 6k^2,$$

medan för punkten $(-1,1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 24h^2 + 24hk + 12k^2 = 24(h + k/2)^2 + 6k^2.$$

Båda kvadratiska former är alltså positivt definit och punkterna är därmed lokala minimipunkter.
I punkten $(0,0)$ däremot är den kvadratiska formen identisk noll, dvs semidefinit och den avgör inte karaktären hos den stationära punkten. Men om vi betraktar funktionen F längs y-axeln så ser vi att $F(0,y) = 2y^3 + 7$ antar både värden som är större och värden som är mindre än $7 = F(0,0)$. Punkten är därmed en sadelpunkt.

Svar: $(0,0)$ är en sadelpunkt och $(\pm 1, 1)$ är lokala minimipunkter.

3. *Avgör om funktionen* *5 p*

$$f(x,y,z) = (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2}$$

antar största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$ *och bestäm dessa i så fall.*

Vi observerar först att $f(x,0,0) = (1 - x^2)e^{x^2} \to -\infty$ då $x \to \infty$, dvs. f är ej nedåt begränsad och saknar därmed minsta värde.

Vidare kan vi konstatera att $f(x,y,z) \geq 0$ för alla punkter (x,y,z) som ligger i ellipsoiden $E := \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$. Eftersom E är kompakt och f är kontiniuerlig antar f ett största värde på E, som även är största värde av f i $\mathbb{R}^3$ ty $f(x,y,z) < 0$ utanför E.

Eftersom f är noll på randen av E antas största värdet i det inre av E, närmare bestämd i en stationär punkt av f.

Vi betraktar alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
f'_x &= \ldots = & 2x(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0 \\
f'_y &= \ldots = & 2y(-1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0 \\
f'_z &= \ldots = & 2z(-2 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0
\end{aligned}$$

Den andre och den tredje ekvationen implicerar direkt att $y = 0$ respektive $z = 0$. Då ger första ekvationen att även $x = 0$. Alltså finns bara en stationär punkt, nämligen origo, som dessutom ligger i E och största värdet är $f(0,0,0) = 1$.

Svar: största värde 1, minsta värde saknas.

4. *Undersök om funktionen* $h(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$ *antar ett största och/eller minsta värde längs kurvan* $x^3 + y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Bestäm dem i förekommande fall.* *5 p*

Kurvan är obegränsad, ty för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ finns det y_0 sådan att punkten $(x_, y_0)$ ligger på kurvan.

Funktionen $h(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$ beror endast på $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dvs. avståndet till origo. Dessutom är $\arctan(r^2)$ en strikt växande funktion (i variablen r).

Om vi betraktar den slutna cirkelskivan $B := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, så finns det säkert punkter av kurvan i den. Skärningen av kurvan med den slutna cirkelskivan är alltså icke-tom och dessutom kompakt (ty kurvan är sluten) och därmed antar h ett minsta värde där.

Pga. monotonin är funktionsvärdena inom B säkert mindre än utanför B och minsta värdet inom B är alltså minsta värdet på hela kurvan.

Däremot finns inte största värde. Eftersom kurvan är obegränsad finns säkert punkter (x_n, y_n) på kurvan sådana att $x_n^2 + y_n^2 \to \infty$ och därmed $h(x_n, y_n) \to \frac{\pi}{2}$, men för ingen punkt (i hela planet) gäller att $h(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

För att hitta minsta värdet undersöker vi punkterna där grad h och grad g är parallella (här betecknar g funktionen som beskriver bivillkoret, dvs $g(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\begin{vmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} & 3x^2 \\ \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} & 3y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Med lite omskrivning blir ekvationen

$$xy(y - x) = 0.$$

Då får vi tre punkter på kurvan $(0, \frac{1}{2^{1/6}})$, $(\frac{1}{2^{1/6}}, 0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Jämförelse av funktionsvärdena ger

$$h\big(0, \frac{1}{2^{1/6}}\big) = h\big(\frac{1}{2^{1/6}}, 0\big) = \arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$$
$$h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arctan(1).$$

Eftersom arctan är en strikt växande funktion är $= \arctan(\frac{1}{2^{1/3}}) < \arctan(1)$ och därmed är minsta värdet $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$.

Svar: minsta värde $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$, största värde saknas.

5. *(a) Visa att för en $\mathcal{C}^2$-funktion f skrivs uttrycket $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i polära koordinater (dvs $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) som $r^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.* *3 p*

   Tips: Det kan vara bra att börja med att beräkna derivatorna med avseende på r.

   (b) Lös (för $r > 0$) den partiella differentialekvationen *2 p*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)f.$$

(a) Vi betraktar funktionen $\widetilde{f}(r, \varphi) := f(x, y)$ och beräknar (enligt tipset) $\widetilde{f}''_{rr}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}'_r &= f'_x \cdot x'_r + f'_y \cdot y'_r = f'_x \cdot \cos\varphi + f'_y \cdot \sin\varphi \\ \widetilde{f}''_{rr} &= \big(f'_{xx} \cdot \cos\varphi + f'_{xy} \cdot \sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f'_{yx} \cdot \cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin\varphi\big)\sin\varphi \\ &= f'_{xx} \cdot \cos^2\varphi + 2f'_{xy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin^2\varphi \end{aligned}$$

Alltså är

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = x^2 f'_{xx} + 2xy f'_{xy} + y^2 f'_{yy}.$$

(b) Differerentialekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - f = 0,$$

som är en linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - 1 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm 1$. Och därmed är den allmänna lösningen

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = A(\varphi)e^r + B(\varphi)e^{-r}$$

där "konstanterna" A och B beror på den andra variablen φ. I de ursprungliga variablerna x och y kan lösningen skrivas som

$$f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}},$$

där C och D är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. (OBS: $\frac{x}{y} = \cot\varphi$ och beror alltså endast på φ).

Svar: allmänna lösning $f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-50}{n^2}(-1)^n$$

(b) För vilka värden på α är den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^1 \frac{5+\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent? Motivera ditt svar!

(a) Den första serien är konvergent enligt kvotkriteriet:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ldots = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

För den andra serien kan vi använda ett av jämförelsekriterierna, t.ex. jämförelsekriteriet I:

$$0 \le \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \le \frac{\sqrt{2n}}{n^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$$

Eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent är även den andra serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$ konvergent.

Den tredje serien är alternerande och vi försöker använda Leibniz-kriteriet. Vi ser direkt $a_n = \frac{n-50}{n^2} \to 0$ då $n \to \infty$. Dock kan vi konstatera att $a_n > 0$ endast för $n > 50$ och det är inte tydligt om följden är monoton (som också är förutsättningar i Leibniz-kriteriet). En möjlighet är att undersöka differensen

$$a_n - a_{n+1} = \ldots = \frac{n^2+n-50}{n^2(n+1)^2},$$

som är alltså positiv för tillräckligt stora n (Vi behöver inte beräkna för vilka n). Då implicerar Leibniz-kriteriet att även den tredje serien är konvergent.

(b) Den generaliserade integralen är generaliserad endast i 0. Vi använder jämförelsekriteriet II

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5+\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 5$$

för att konstatera att den generaliserade integralen i fråga är konvergent precis om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent, vilket är fallet precis om $\alpha < 1$.

Svar: (a) konvergent, konvergent, konvergent (b) konvergent för $\alpha < 1$, annars divergent