MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Tentamenskrivning i
Analys A, 7.5 hp
den 15/8 2019, kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt på den skriftliga delen. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. Berakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases} .$$

   (a) Visa att funktionen f är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd. 2 p

   (b) I vilka punkter f är partiellt deriverbar? 2 p

   (c) I vilka punkter f är differentierbar? 1 p

   Motivera dina svar!

2. (a) Avgör om funktionen f från uppgift ovan antar största och minsta värde i området 3 p

$$D = \{(x,y) : |y| \leq \sqrt{3}\, x\}.$$

   (b) Bestäm dessa extremvärden i förekommande fall. 2 p

3. Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen 5 p

$$g(x,y) = 10 + x^3 + y^3 - 3\alpha xy$$

   och avgör deras karaktär.

4. Motivera varför funktionen $h(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ antar ett största och ett minsta värde på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ samt bestäm dessa. 5 p

5. Lös följande partiella differentialekvation för funktionen $F(x,y)$ 5 p

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2x\frac{\partial F}{\partial y} = F,$$

   t.ex. genom variabelbytet

$$\begin{array}{rcl} u & = & x \\ v & = & y - x^2 \end{array} .$$

   Bestäm även lösningen som uppfyller $F(x,0) = e^{x^2+x}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Var god vänd!

6. (a) i. För vilka värden på $\beta > 0$ är serien — 2 p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^\beta+3}$$

konvergent?

ii. Är serien — 1 p

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$$

konvergent?

(b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? — 2 p

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$$

Resultat publiceras så snabbt som möjligt på kurshemsidan. Även information angående anmälan och schemat till muntan kommer upp där efter att den skriftliga tentan är rättad.

Visning av skriftliga tentorna: Måndag 19/8, kl 12:30, rum 209 i hus 6.
Återlämning: bara efter att betyg har sätts, dvs säkert när alla muntliga tentor har avslutats, på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!