MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 15/8 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Berakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases} .$$

(a) *Visa att funktionen f är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.* 2 p

(b) *I vilka punkter f är partiellt deriverbar?* 2 p

(c) *I vilka punkter f är differentierbar?* 1 p

Till att börja med kan vi konstatera att funktionen är en sammansättning av differentierbara funktioner utom i punkten $(1,0)$ och är differentierbar (och därmed även kontinuerlig och partiellt deriverbar) i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$. Vi behöver alltså endast undersöka $(1,0)$.

(a) Vi använder polära koordinater med center $(1,0)$, dvs $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och får

$$f(x,y) = \frac{r^2\sin^2\varphi \cdot r\cos\varphi}{r^2} = r\sin^2\varphi\cos\varphi \to 0, \text{ då } (x,y) \to (1,0),$$

ty $\sin^2\varphi\cos\varphi$ är begränsat och $r \to 0$. Alltså har vi fått att

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0),$$

dvs f är kontinuerlig även i $(1,0)$.

(b) Vi ser direkt att $f(1,y) = 0$ för alla y och $f(x,0) = 0$ för alla x. Alltså finns de partiella derivatorna i $(1,0)$ och är lika med 0.

(c) För att undersöka på differentierbarhet kollar vi

$$\frac{f(1+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \ldots = \frac{k^2h}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Om vi sätter t.ex. $h = k$, ser vi att uttrycket vidare är lika med $\frac{1}{2^{3/2}}$ och därmed inte går mot 0.

Svar: a) se ovan b) partiellt deriverbar i hela $\mathbb{R}$ c) differentierbar i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$.

2. (a) *Avgör om funktionen f från uppgift ovan antar största och minsta värde i området* 3 p

$$D = \{(x,y) : |y| \leq \sqrt{3}\,x\}.$$

(b) *Bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* 2 p

(a) Vi ser först att $f(x,x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2+x^2} = \frac{x^3-x^2}{2x^2-2x+1}$ växer över alla gränser då $x \to \infty$. (OBS: linjen (x,x) för $x \geq 0$ ligger i området D.) Därmed finns inget största värde.

Sen betraktar vi området $D_- := \{(x,y) \in D,\ x \leq 1\}$. Området är kompakt, funktionen f är kontinuerlig på D_- (ty den är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ enligt 1.(a)) . Därför antar f minsta värde i D_-. Men f på D_- antar bara icke-positiva värden, medan på $D \setminus D_-$ är värdena icke-negative. Alltså är minsta värdet på D_- även minsta värde på hela D.

(b) För att bestämma minsta värdet av f i D måste vi bestämma minsta värdet av f i det kompakta området D_-. Vi börjar med att undersöka om det finns stationära punkter i det inre av D_-. (OBS: Det inre av D_- innehåller inte punkten $(1,0)$ och därmed är h differentierbar i det inre av D_-.)

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \ldots = y^2 \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \\ f'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Andra ekvationen är uppfylld endast om antingen $x = 1$ eller $y = 0$. Första fallet kan inte inträffa i det inre av D_-, ty då är $x < 1$. Om $y = 0$ så är även första ekvationen uppfylld och alla punkter på sträcken $(x, 0)$ med $0 < x < 1$ är stationära punkter. I dessa punkter är dock $h(x, 0) = 0$.

Det återstår att kolla randen, som består av

i. sträckan $(1, y)$ för $|y| \leq \sqrt{3}$

ii. sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ för $0 < x < 1$.

Längs sträckan $(1, y)$ är $h(1, y) = 0$.

Längs sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ undersöker vi hjälpfunktionen

$$H(x) := f(x, \pm\sqrt{3}x) = \ldots = \frac{3(x^3-x^2)}{4x^2-2x+1} \text{ för } 0 < x < 1.$$

Derivatan blir $H'(x) = \ldots = \frac{3x}{(4x^2-2x+1)^2}(4x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$. Vi kan gissa ett nollställe $x = \frac{1}{2}$ och polynomdivision visar att det inte finns andra nollställen i intervallet. Eftersom $H(\frac{1}{2}) = \ldots = -\frac{3}{8}$ är sammanlagt minsta värdet av f i D_-, och därmed även i D, lika med $-\frac{3}{8}$.

Svar: a) inget största värde, men minsta värde   b) minsta värde är $-\frac{3}{8}$.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$g(x, y) = 10 + x^3 + y^3 - 3\alpha xy$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I) \quad g'_x &= \ldots = 3(x^2 - \alpha y) = 0 \\ (II) \quad g'_y &= \ldots = 3(y^2 - \alpha y) = 0 \end{aligned}$$

I fall att $\underline{\alpha \neq 0}$ kan vi lösa ut y ur första ekvationen $y = \frac{x^2}{\alpha}$. Andra ekvationen blir då - efter lite omskrivning - $x(x^3 - \alpha^3) = 0$. Den har lösningarna $x = 0$ och $x = \alpha$. Dvs vi har fått stationära punkterna $(0, 0)$ och (α, α). För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6x \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = -3\alpha \qquad g''_{yy} = 6y.$$

I punkten $(0, 0)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = -6\alpha hk$ och alltså indefinit (ty $\alpha \neq 0$). Därmed är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

För punkten (α, α) är den kvadratiska formen $Q(h, k) = \ldots = 6\alpha((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{9\alpha}{2}k^2$. För $\alpha > 0$ är den positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\alpha < 0$ är den negativt definit och punkten därmed en lokal maximipunkt.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi bara en enda stationär punkt, nämligen $(0, 0)$. Alla andra derivator försvinner och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(0, 0) = 10$ medan $g(t, 0) = 10 + t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 10 (i varje omgivning av $t = 0$). Därmed är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Svar: $(0, 0)$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\alpha > 0$ finns dessutom den lokala minimipunkten (α, α) och i fall $\alpha < 0$ är (α, α) en lokal maximipunkt.

4. *Motivera varför funktionen $h(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$ antar ett största och ett minsta värde på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ samt bestäm dessa.* 5 p

Eftersom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är kompakt och funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på sfären. Vi använder methoden med Langrange-multiplikator och inför hjälpfunktionen

$$F(x, y, z; \lambda) := x^2 - y^2 + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 2x - 2x\lambda &= 0 \\ -2y - 2y\lambda &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Eller på ekvivalent form

$$\begin{aligned} x(1 - \lambda) &= 0 \\ y(1 + \lambda) &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt fortfarande

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Från den första ekvationen för vi antingen $x = 0$ eller $\lambda = 1$.

I fall $x = 0$ är (i den andra ekvationen) antingen $y = 0$ och därmed (från bivillkoret) $z = \pm 2$ eller $\lambda = -1$ och därmed från tredje ekvationen $z = -\frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $y^2 = \frac{15}{4}$. Motsvarande funktionsvärden är ± 2 och $-\frac{17}{4}$.

I fall $\lambda = 1$ får vi $y = 0$ och $z = \frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $x^2 = \frac{15}{4}$, där funktionsvärdet blir $\frac{17}{4}$.

Svar: Minsta värde $-\frac{17}{4}$ och största värde $\frac{17}{4}$.

5. *Lös följande partiella differentialekvation för funktionen $F(x, y)$* 5 *p*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2x\frac{\partial F}{\partial y} = F,$$

t.ex. genom variabelbytet

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= y - x^2 \end{aligned} .$$

Bestäm även lösningen som uppfyller $F(x, 0) = e^{x^2+x}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u, v) := F(x, y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u \cdot 1 + \widetilde{F}'_v \cdot (-2x) \\ F'_y &= \widetilde{F}^{e\prime}_v \cdot 1. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}'_u = \widetilde{F}.$$

Detta är en linjär första ordningsdifferentialekvation (i variablen u), som har lösningen $\widetilde{F}(u,v) = C(v) \cdot e^u$, där ”konstanten” C är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion i den andra variablen v. Därmed får vi den allmänna lösningen

$$F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x.$$

För den speciella lösningen gäller då

$$F(x,0) = C(-x^2) \cdot e^x = e^{x^2+x}$$

och därmed $C(t) = e^{-t}$.

Svar: Den allmänna lösningen är $F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x$.
Lösningen som även uppfyller det ytterligare villkoret är $F(x,y) = e^{-y+x^2+x}$.

6. *(a)* *i. För vilka värden på $\beta > 0$ är serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^\beta+3}$$

konvergent?

ii. Är serien *1 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$$

konvergent?

(b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? *2 p*

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx$$

(a) i. Serien är en positiv serie och vi använder jämförelsekriteriet II

$$\frac{\frac{n^2+2}{n^\beta+3}}{\frac{n^2}{n^\beta}} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^\beta}} \to 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså har serien i fråga samma konvergensbeteende som serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\beta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-2}}$.
Den är konvergent precis om exponenten $\beta - 2 > 1$.

ii. Termerna i serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$ går inte mot 0, alltså kan serien ej konvergera.

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför upp integralen i

$$\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx + \int_3^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx.$$

För det första integral utvecklar vi integranden

$$\frac{1-\cos x}{x^{5/2}} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{x^{5/2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} + O(x^{3/2}).$$

Genom att använda jämförelsekriteriet II och t.ex. funktionen $\frac{1}{2x^{1/2}}$ ser vi att den första generaliserade integralen är konvergent, ty $\int_0^3 \frac{1}{2x^{1/2}}\, dx$ är konvergent.
För den andra integralen kan vi t.ex. uppskatta integranden

$$\left| \frac{1-\cos x}{x^{5/2}} \right| \le \frac{2}{x^{5/2}}.$$

Eftersom $\int_3^\infty \frac{2}{x^{5/2}}\, dx$ är konvergent är enligt jämförelsekriteriet I även den andra integralen ovan konvergent.

Svar: (a) i. konvergent för $\beta > 3$. ii. divergent. (b) konvergent