MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Tentamenskrivning i
Analys A, 7.5 hp
den 14/10 2019, kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt på den skriftliga delen. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. Betrakta funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Visa att gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ inte finns. 1 p

   (b) Är g partiellt deriverbar i origo? 2 p

   (c) Tillhör g klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$? 2 p

   Motivera dina svar!

2. Avgör om $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4}$ antar största och/eller minsta värde i mängden D och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.

   (a) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$ 3 p

   (b) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 2 p

3. Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen 5 p

$$f(x,y) = 2x^3 - 6\alpha^2 xy^2 + 3\alpha^3 y^4$$

   och avgör deras karaktär.

4. (a) Avgör om funktionen $h(x,y) = xy$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$ har största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i så fall. 4 p

   (b) Vilka värden antar funktionen $H(x,y) = \arctan(xy)$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$? Använd dina resultat från deluppgift (a) och motivera ditt svar ordentligt! 1 p

5. (a) Låt funktionen $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring punkten $(1,-2)$

$$G(x,y) = 7+2(x-1)+3(y+2)+\frac{1}{2}\Big(-8(x-1)^2-12(x-1)(y+2)+(y+2)^2\Big)+\big((x-1)^2+(y+2)^2\big)^{\frac{3}{2}}B(x,y),$$

   där B är begränsad i en omgivning av $(1,-2)$. 3 p

   i. Ange $G(1,-2)$ och $G'_x(1,-2)$.

   ii. Ange tangentplanet till grafen till G i punkten $(1,-2,G(1,-2))$. Går tangentplanet genom origo?

   iii. I vilken riktningen växer funktionen snabbast i punkten $(1,-2)$?

   iv. Räcker informationen ovan för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Om ja, ange det! Om nej, förklara varför inte.

   (b) Ange en mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ som har följande egenskaper: M är varken öppen eller sluten, M är obegränsad och ej bågvis sammanhängande. Förklara även varför din mängd har dessa egenskaper! 2 p

Var god vänd!

6. (a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent: 4 p

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

   ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

   iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2+100}$

   (b) Någon säger: *Jag påstår att serien* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ *är konvergent eftersom* 1 p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\frac{(-1)^n}{n^2}} = 1.$$

   Är det korrekt? Om ja, förtydliga argumentet, dvs ange vilken sats eller vilka satser som används. Om nej, gör ett korrekt resonemang.

Resultat publiceras så snabbt som möjligt på kurshemsidan. Även information angående anmälan och schemat till muntan kommer upp där efter att den skriftliga tentan är rättad.

Visning av skriftliga tentorna: torsdag 17/10, kl 12:15 i sal 22.
Återlämning: bara efter att betyg har sätts, dvs säkert när alla muntliga tentor har avslutats, på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!