MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 14/10 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Visa att gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *inte finns.* *1 p*

(b) Är g partiellt deriverbar i origo? *2 p*

(c) Tillhör g klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$*?* *2 p*

Motivera dina svar!

(a) Vi ser att t.ex. $g(t,0) = 0$ för alla t, medan $g(t,t^3) = \ldots = \frac{1}{2}$ för alla $t \neq 0$, alltså kan gränsvärdet inte finnas.

(b) Vi kollar direkt definitionen. Då ser vi att $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 0$ och $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = 0$ och därmed är g partiellt deriverbar i origo.

(c) Eftersom gränsvärdet i (a) inte existerar kan funktionen g inte vara kontinuerlig i origo. vilket även innebär att g inte tillhör klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Svar: a) se ovan b) ja c) nej.

2. *Avgör om* $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4}$ *antar största och/eller minsta värde i mängden D och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.*

(a) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$ *3 p*

(b) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *2 p*

Vi konstaterar först att $F(x,y) > 0$ samt att t.ex. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4} = 0$. Alltså är alla funktionsvärden strikt större än noll, men det finns funktionsvärden godtyckligt nära noll. Dvs F har i båda fall inget minsta värde.

När vi tittar på funktionen så verkar det som att i fallet (a) är funktionen begränsad och blir liten för punkter långt bort från origo, medan i (b) verkar den vara obegränsad. Pga denna förmodan blir strategin att undersöka angående maximum olika i (a) respektive (b).

(a) Vi börjar med att beräkna $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} F(x,y)$. Det kan vi göra på olika sätt, t.ex. med polära koordinater

$$0 \leq F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2+1}{r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} = \ldots = \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi} \leq \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Alltså har vi $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} F(x,y) = 0$ och därmed finns till varje $\epsilon > 0$ ett tal R sådan att $F(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) med $\sqrt{x^2+y^2} > R$. För att kunna göra ett lämpligt val av ϵ kollar vi stationära punkter i D samt funktionsvärden på randen $x^2+y^2 = 1$. Vi börjar med stationära punkter. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) &= \frac{2x(x^4+y^4)-(x^2+y^2+1)4x^3}{(x^4+y^4)^2} = 0. \\ F'_y(x,y) &= \frac{2y(x^4+y^4)-(x^2+y^2+1)4y^3}{(x^4+y^4)^2} = 0. \end{aligned}$$

Multiplikation av den första ekvationen med y och den andra med x samt subtraktion leder till

$$(x^2 + y^2 + 1)(4x^3 y - 4xy^4) = 0,$$

och därmed $xy(x^2 - y^2) = 0$. Insättning i t.ex. den första ekvationen visar att $x = 0$ skulle leda till $y = 0$, liksom $y = 0$ till $x = 0$. Men eftersom $(0, 0)$ inte ligger i definitionsområdet ger det ingen lösning. Men även $x^2 = y^2$ leder till samma punkt (måste visas!) och därmed finns inga stationära punkter.

På randen har vi $h(\varphi) := F(\cos\varphi, \sin\varphi) = \dfrac{2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$. Derivering ger

$$h'(\varphi) = \ldots = 8\frac{\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2}.$$

I punkterna där derivatan försvinner får vi följande funktionsvärden: Om $\sin\varphi = 0$ eller $\cos\varphi = 0$ blir funktionsvärdet 2, om däremot $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$ så är $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi = \frac{1}{2}$ och därmed funktionsvärdet 4.

Om vi nu t.ex. väljer $\epsilon = \frac{1}{7}$ så vet vi enligt ovan att det finns R sådan att $F(x, y) < \frac{1}{7}$ i området $x^2 + y^2 > R^2$. Men området $1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ är kompakt och därför antar den kontinuerliga funktionen F säkert ett största värde där. Detta värde är (enligt våra beräkningar ovan) lika med 4, som därmed är största värdet i hela D.

(b) Om $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ så ligger t.ex. punkterna $(0, t)$ för $t \neq 0$ inom D. Eftersom $F(0, t) = \frac{t^2+1}{t^4}$ växer över alla gränser då $t \to 0$ är F obegränsad och saknar största värde.

Svar: a) minsta värde saknas, största värde 4 b) största och minsta värde saknas.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$f(x, y) = 2x^3 - 6\alpha^2 xy^2 + 3\alpha^3 y^4$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{lcl} (I) \quad f'_x &=& \ldots = 6(x^2 - \alpha^2 y^2) = 0 \\ (II) \quad f'_y &=& \ldots = 12\alpha^2 y(-x + \alpha y^2) = 0 \end{array}$$

I andra ekvationen har vi tre fall: $\alpha = 0$, $y = 0$ eller $x = \alpha y^2$.

$\alpha = 0$ ger i första ekvationen $x = 0$ och därmed är alla punkter $(0, t)$ för $t \in \mathbb{R}$ stationära punkter.

$y = 0$ implicerar även $x = 0$ och därmed är $(0, 0)$ en stationär punkt för alla α.

$x = \alpha y^2$ leder till $y^2(y^2 - 1) = 0$. Eftersom $y = 0$ redan diskuterades kan vi dra slutsatsen att $y = \pm 1$. I båda fall får vi då $x = \alpha$. Vi får två stationära punkter $(\alpha, \pm 1)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx} = 12x \qquad G''_{xy} = G''_{yx} = -12\alpha^2 y \qquad G''_{yy} = -12\alpha^2 x + 3 \cdot 12\alpha^3 y^2.$$

I punkten $(0, 0)$ försvinner alla andra derivator, och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $G(0, 0) = 0$ och att $G(t, 0) = 2t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $t = 0$). Därmed är för alla värden på α punkten $(0, 0)$ en sadelpunkt.
För punkten $(\alpha, \pm)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = \ldots = 12\alpha((h \pm \alpha k)^2 + \alpha^2 k^2)$. För $\alpha > 0$ är den positivt definit och punkterna är därmed en lokala minimipunkter, medan för för $\alpha < 0$ är den negativt definit och punkterna därmed lokala maximipunkter.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(0, t)$. I en sådan punkt är funktionsvärdet $G(0, t) = 0$ men $G(x, t) = 2x^3$ kan antar positiva värden för $x > 0$ och negativa för $x < 0$ och därmed är alla dessa punkter saddelpunkter.

Svar: $(0, 0)$ är alltid en saddelpunkt.

Om $\alpha > 0$ finns dessutom de lokala minimipunkter $(\alpha, \pm 1)$

om $\alpha < 0$ är de lokala maximipunkter $(\alpha, \pm 1)$.

om $\alpha = 0$ består hela y-axeln av sadelpunkter.

4. *(a) Avgör om funktionen $h(x, y) = xy$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$ har största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i så fall.* *4 p*

   (b) Vilka värden antar funktionen $H(x, y) = \arctan(xy)$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$? Använd dina resultat från deluppgift (a) och motivera ditt svar ordentligt! *1 p*

   (a) Kurvan är en sluten mängd, genom kvadratkomplettering ser vi att kurvan kan skrivas på formen $(x + y)^2 + 3y^2 = 3$, dvs kurvan är begränsad, och därmed kompakt. Då funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på kurvan . Eftersom funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ och även bivillkoret är given av en kontinuerlig funktion med öppen definitionsmängd, så måste extrempunkterna uppfylla det nödvändiga villkoret att gradienten av h och gradienten av funktionen som ger bivillkoret är linjärt beroende i dessa punkter eller så är de randpunkter till kurvan. Först betraktar vi alltså ekvationssystemet

$$\det \begin{pmatrix} y & 2x + 2y \\ x & 2x + 8y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{samt } (x + y)^2 + 3y^2 = 3.$$

   Beräkning av determinanten ger $4y^2 - x^2 = 0$, dvs $x = \pm 2y$. Insättning i bivillkoret ger (obs här hoppar jag över beräkningen!) två punkter:

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (1, \frac{1}{2}),$$

   som ger funktionsvärdena $-\frac{3}{2}$ och $\frac{1}{2}$. Därtill kommer kurvans randpunkter där $y = 0$. Dessa är $(\pm\sqrt{3}, 0)$ som ger funktionsvärdet 0.

   (b) Kurvan är bågvis sammanhängande och funktionen är kontinuerlig, alltså antar funktionen h i (a) alla värden mellan sitt minsta värde och sitt största värde, dvs värdemängden är intervallet $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. Eftersom arctan är kontinuerlig och växande antar då H på kurvan alla värden i intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

Svar: (a) Minsta värde $-\frac{3}{2}$, största värde $\frac{1}{2}$. (b) intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

5. *(a) Låt funktionen $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring punkten $(1, -2)$*

$$G(x, y) = 7 + 2(x-1) + 3(y+2) + \frac{1}{2}\Big(-8(x-1)^2 - 12(x-1)(y+2) + (y+2)^2\Big) + \big((x-1)^2 + (y+2)^2\big)^{\frac{3}{2}} B(x, y),$$

   där B är begränsad i en omgivning av $(1, -2)$. *3 p*

   i. *Ange $G(1, -2)$ och $G'_x(1, -2)$.*
   ii. *Ange tangentplanet till grafen till G i punkten $(1, -2, G(1, -2))$. Går tangentplanet genom origo?*
   iii. *I vilken riktningen växer funktionen snabbast i punkten $(1, -2)$?*
   iv. *Räcker informationen ovan för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Om ja, ange det! Om nej, förklara varför inte.*

   (b) Ange en mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ som har följande egenskaper: M är varken öppen eller sluten, M är obegränsad och ej bågvis sammanhängande. Förklara även varför din mängd har dessa egenskaper! *2 p*

(a) i. Vi kan läsa av funktionsvärdet och den partiella derivatan från Taylorutvecklingen: $G(1,-2) = 7$ och $G'_x(1,-2) = 2$.

ii. Tangentplanet till grafen till G i punkten $(1, -2, G(1, -2))$ har ekvationen $z = 7+2(x-1)+3(y+2)$. Origo ligger dock inte på planet, ty $0 \neq 7+2(0-1)+3(0+2)$.

iii. Funktionen växer snabbast i grandientens riktning, vilken i punkt $(1, -2)$ är $(2, 3)$.

iv. Nej, formationen ovan räcker inte för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Vi bara vet att B är begränsad, men vi vet inte hur stor den är i punkten i fråga.

(b) Ett exempel på en sådan mängd är $M := \{(x, y) : x > 2\} \cup \{(0, 8)\}$. Mängden består av alla punkter som ligger höger om linjen $x = 2$ samt den enskilde punkten $(0, 8)$. Hela linjen $x = 2$ består av randpunkter som dock inte tillhör mängden, alltså är den ej sluten. Punkten $(0, 8)$ är också en randpunkt, den tillhör mängden, som därmed inte heller är öppen. M är obegränsad, ty t.ex. alla punkter av formen $(t, 0)$ med $t > 2$ tillhör mängden, dvs punkter med godtyckligt stor avstånd till origo. Mängden är ej bågvis sammanhängande, ty det inte går att binda samman punkten $(0, 8)$ med någon av de andra punkterna med en kurva som helt ligger i M.

6. (a) *Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:*

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2 + 100}$

(b) *Någon säger: Jag påstår att serien* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ *är konvergent eftersom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\frac{(-1)^n}{n^2}} = 1.$$

Är det korrekt? Om ja, förtydliga argumentet, dvs ange vilken sats eller vilka satser som används. Om nej, gör ett korrekt resonemang.

(a) i. Genom att använda kvotkriteriet ser vi att $\left|\frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \ldots = (1 + \frac{1}{n})^n \to e > 1$ och därmed att serien är divergent.

Alternativt kunde vi t.ex. genom uppskattningen $\frac{n^n}{n!} \geq \frac{n!}{n!} = 1$ kunnat se att termerna inte går mot noll och även så kunnat konstatera att serien är divergent.

ii. Vi ämnar använda rotkriteriet och kollar därför

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}\right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Alltså är serien absolut konvergent.

iii. Vi kollar förutsättningarna för Leibniz-kriterium. Termerna $\frac{n}{n^2+100}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2 + 100}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{100-t^2}{(t^2+100)^2}$. För $t > 10$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent. För att kolla om den även är absolut konvergent undersöker vi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+100}$. Vi ser dock t.ex. $\dfrac{\dfrac{n}{n^2+100}}{\dfrac{1}{n}} \to 1$ och då har serien, enligt jämförelsekriteriet II samma konvergensbeteende som serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, dvs den är divergent.

(b) Argumentet är inte korrekt, ty jämförelsekriterierna får användas enbart för positiva serier. I detta fall kan man istället jämföra serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, dvs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 1.$$

Men eftersom $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ får vi så att den ursprungliga serien är absolut konvergent.

Svar: (a) <u>divergent, absolut konvergent, betingat konvergent</u> (b) <u>se ovan.</u>