MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 5/3 2020

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. (a) *Ange ett värde på konstanten c sådant att funktionen* *3 p*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{cases} x\ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är kontinuerlig. I vilka punkter är funktionen differentierbar? Motivera dina svar!

(b) *Avgör om funktionen* *2 p*

$$h(x,y) = \frac{\ln(y+1)}{x} \qquad då \qquad x > 0$$

har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ (med $x > 0$).

(a) Om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar och vi sätter c lika med gränsvärdet, så är f kontinuerlig. Vi använder polära koordinater och betraktar

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ldots = 2\cos\varphi \cdot r\ln r,$$

som går mot 0 då $(x,y) \to (0,0)$, ty den första faktorn är begränsad och den andra faktorn $r\ln r \to 0$, då $r \to 0$. Alltså är $c = 0$.

Funktionen f är i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en sammansättning av differentierbara funktioner och därmed själv differentierbar där. I origo måste vi undersöka närmare. Men vi ser att f inte är partiellt deriverbar med avseende på x i origo, ty

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln h^2$$

existerar inte. Därmed kan f inte vara differentierbar i origo.

(b) Vi betraktar $h(x,x) = \frac{\ln x+1}{x} \to 1$ då $x \to 0$, men $h(x,0) = 0$. Därmed existerar gränsvärdet inte.

Svar: a) $c = 0$, och f är differentierbar i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ b) nej, gränsvärdet existerar inte.

2. *Betrakta funktionen $G(x,y) = xy\,e^{x^2-y^2}$.* *5 p*

(a) *Undersök om funktionen G antar största och/eller minsta värde i mängden*

$$A = \{(x,y) : |x-y| \leq 1\}$$

och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.

(b) *Vilka värden antar funktionen G i mängden*

$$B = \{(x,y) : |x-y| < 1\}?$$

Vi konstaterar först att mängden A är en sluten, men obegränsad remsa kring första medianen, och B är dess inre. Ingen av mängderna är kompakt. Vi noterar att $G(x,x) = x^2 \cdot e^0$ är obegränsad då $x \to \infty$, dvs G har inget största värde, varken i A eller B.

(a) Sen konstaterar vi att $G(x,y) \geq 0$ för (x,y) i första och tredje kvadranten, samt $G(x,y) \leq 0$ för (x,y) i andra och fjärde kvadranten. Eftersom skärningen av de sistnämnda med mängden A är begränsad vet vi att den kontinuerliga funktionen G antar ett minsta värde på den kompakta mängden $D := \{(x,y) \in A, x \cdot y \leq 0\}$. Detta värde måste vara negativt och därmed även minsta värde för G i A.

För att beräkna minsta värde betraktar vi först ev. stationära punkter i det inre av D. Redan den första ekvationen $G'_x(x,y) = ye^{x^2-y^2}(1+2x^2) = 0$ har dock inga lösningar som kan ligga i det inre, ty $y = 0$. Alltså fortsätter vi med randen av D. Längs koordinataxlarna försvinner funktionen och det återstår att undersöka G längs linjerna $(t, t-1)$ för $t \in [0,1]$ samt $(t, t+1)$ för $t \in [-1, 0]$. Av symmetriskäl räcker det dock att undersöka bara en av dessa, vi väljer den första, dvs

$$h(t) := G(t, t-1) = (t^2 - t)e^{2t-1} \qquad t \in [0,1].$$

Derivation ger $h'(t) = \ldots = (2t^2 - 1)e^{2t-1}$ som har bara ett relevant nollställen, nämligen $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Därmed får vi som minsta värde $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

(b) I (a) har vi sett att G antar sitt minsta värde $b := \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$ på randen av mängden A (och endast där), dvs i en punkt som är en randpunkt till mängden B men som inte ligger i B. Därmed vet vi att $G(x,y) > b$ för $(x,y) \in B$, samt att G antar värden som är godtyckligt nära b. Dessutom har vi sett att G är uppåt obegränsad i B. Eftersom G är kontinuerlig och definitionsmängden B är bågvis sammanhängande har alltså G egenskap av mellanliggande värden och antar därmed alla värden i det öppna intervallet (b, ∞).

Svar: a) minsta värde $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$, största värde saknas b) G antar i B alla värden större än $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = (x+y)^3 + \beta(3x^2 + y^2)$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.* *5 p*

   (a) Bestäm för varje värde på $\beta \neq 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

   (b) Bestäm för $\beta = 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I) \quad g'_x &= 3(x+y)^2 + 6\beta x = 0 \\ (II) \quad g'_y &= 3(x+y)^2 + 2\beta y = 0. \end{aligned}$$

(a) I fall $\underline{\beta \neq 0}$ leder subtraktion till $y = 3x$. Om man stoppar in det i den första ekvationen får man $6x(8x + \beta) = 0$. Dvs vi får två stationära punkter $(0,0)$ och $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6(x+y) + 6\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 6(x+y) \qquad g''_{yy} = 6(x+y) + 2\beta.$$

I punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = 6\beta h^2 + 2\beta k^2$. För $\beta > 0$ är den positivt definit och origo är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\beta < 0$ är den negativt definit och origo därmed en lokal maximipunkt.
För punkten $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = 3\beta((h-k)^2 - 4\beta k^2$ som är indefinit för varje värde på $\beta \neq 0$ och därmed är punkten en sadelpunkt.

(b) I fall att $\underline{\beta = 0}$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(t, -t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Alla andra derivator försvinner och därmed är varje kvadratisk form bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(t, -t) = 0$ medan $g(t+h, -t) = h^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $h = 0$). Därmed är varje punkt på linjen en sadelpunkt.

Svar: (a) $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\beta > 0$ är origo en lokala minimipunkt och i fall $\beta < 0$ är origo en lokal maximipunkt.
(b) Varje punkt på linjen $y = -x$ är en sadelpunkt.

4. *Avgör om funktionen $f(x,y,z) = xyz$ har största och/eller minsta värde under bivillkoren*

$$x + y + z = 0 \quad \textit{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Bestäm dessa i så fall. *5 p*

Första bivillkoret beskriver ett plan i $\mathbb{R}^3$ och andra bivillkoret enhetsfären. Funktionens definitionsområde är alltså ett cirkel i rummet, och därmed kompakt. Eftersom f är kontinuerlig, så antas både största och minsta värde på denna mängd. Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ytorna som ges av bivillkoren) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x,y,z;\lambda,\mu) := xyz + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-1).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} yz + \lambda + 2x\mu &= 0 \\ xz + \lambda + 2y\mu &= 0 \\ xy + \lambda + 2y\mu &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Subtraktion av den första och andra ekvationen samt den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$\begin{aligned} (y-x)(z-2\mu) &= 0 \\ (z-y)(x-2\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvation har vi antingen $y = x$ eller $z = 2\mu$. Om vi stoppar in $y = x$ i bivillkoren får vi två intressanta punkter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ (OBS den andra ekvationen är du uppfylld med lämplig μ men värdet på det är ej relevant för lösningen). I andra fallet $z = 2\mu$ ger den andra ekvationen antingen $z = y$ eller $z = 2\mu$, vilket betyder $x = z$. I dessa två fall ger insättning i bivillkoren 4 punkter till, nämligen $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ och $\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Om vi sätter in dessa i funktionen får vi att största värdet är $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ och minsta värdet är $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

5. Lös den partiella differentialekvationen 5 p

$$xF''_{xx} - 4x^3F''_{yy} - F'_x = 16x^3$$

för $x > 0$, till exempel med hjälp av de nya variablerna $s = x^2 - y$ och $t = x^2 + y$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_x &= 2x\widetilde{F}'_s + 2x\widetilde{F}'_t \\ F''_{xx} &= 4x^2\widetilde{F}''_{ss} + 8x^2\widetilde{F}''_{st} + 4x^2\widetilde{F}''_{tt} + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= \widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}''_{st} = 1.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = st + \varphi(t) + \psi(s)$$

och därmed

$$F(x,y) = (x^2 - y)(x^2 + y) + \varphi(x^2 + y) + \psi(x^2 - y),$$

där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. *(a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *5 p*

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n$

(b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ *är serien* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ *är konvergent, för vilka divergent?*

(a) i. Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{(n+1)}}{\binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(2n+2)(2n+1)}{6(n+1)^2} \to \frac{2}{3} \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{2}{3} < 1$ är serien absolut konvergent.

ii. Eftersom $\cos(n\pi) = (-1)^n$ så är serien lika med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

dvs. den harmoniska serien, som är alltså divergent.

(b) Vi använder rotkriteriet och får

$$\sqrt[n]{|e^{-nx}|} = e^{-x}.$$

För $x < 0$ är $e^{-x} > 1$ och serien därmed divergent, för $x > 0$ är $e^{-x} < 1$ och serien därmed konvergent. I fallet $x = 0$ måste vi kolla direkt. Eftersom $e^{0 \cdot n} = 1$ inte går mot 0 då $n \to \infty$, så är serien inte konvergent.

Svar: (a) <u>i. konvergent, ii. divergent</u> (b) <u>För $x > 0$ är serien konvergent, för $x \leq 0$ är serien divergent.</u>