

Minst 7,5 poäng (inklusive bonus) på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras.

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral konvergerar eller divergerar:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1) - \ln k), \quad b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}.$$

3 p

2. Undersök om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^2+xy+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}, \quad b) \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+xy+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

3 p

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x-y)^2,$$

t ex genom att göra variabelbytet $x = u + v$, $y = v$ (eller ekvivalent $u = x - y$, $v = y$).

3 p

4. Betrakta funktionen

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(xy + yz + zx).$$

a) Avgör om $f(x, y, z)$ antar största och/eller minsta värde på \mathbb{R}^3 .

1 p

b) Alla f 's stationära punkter ligger på linjen $x = y = z$ (detta får antas utan bevis). Bestäm dessa och avgör deras karaktär (max, min eller sadelpunkt).

2 p

Anmärkning: a-uppgiften kan vara en hjälp för att lösa b-uppgiften!

5. Motivera varför funktionen $f(x, y) = x + y$ måste anta ett största och ett minsta värde på kurvan $x^4 - xy + y^4 = 1$, samt bestäm dessa.

3 p

Teoridel

6. Visa att om $a > 1$, så är $\lim_{x \rightarrow +\infty} x/a^x = 0$. Bevisa även att $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x = 0$ och att $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

3 p

7. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typ $t \mapsto f(g(t), h(t))$.

3 p

LYCKA TILL!

*Skrivningsresultatet kommer att finnas tillgängligt senast måndagen den 19 oktober (sannolikt tidigare). Beslut om återlämning av tentorna kommer att fattas med hänsyn till rådande omständigheter och meddelas via kurssidan. **OBS!!! Notera numret på din skrivplats. Det är med hjälp av detta som du kommer att få veta om du blir kallad till munta.***