MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentamen i
Analys B, 7.5 hp
den 10 januari 2019

Problemdel

1 Eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

är integralen oberoende av vägen om man undviker origo - den enda singulära punkten. Vi kan försöka hitta en potential $U(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} & = & \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & = & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow U(x,y) = \ln(x^2+y^2) + C,$$

där konstanten C kan sättas lika med noll.

Integralen längst γ kan beräknas med hjälp av insättningsformeln:

$$\int_\gamma \ldots = U(2,2) - U(2,0) = \ln(2^2+2^2) - \ln 2^2 = \ln 2.$$

2 Konvergensradie är lika med 1

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1.$$

Man får serien för $\int_0^z f(w)dw$ genom att integrera termvis

$$\int_0^z f(w)dw = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}$$

(geometrisk serie). Man får $f(z)$ genom att derivera

$$f(z) = \frac{d}{dz}\frac{z}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Funktionen är singulär för $z = R = 1$.

3 Vi kompletterar ytan Y med botten Y_1

$$Y_1 = \Big\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, z = 0\Big\}.$$

Flödesintegralen genom botten är enkelt att beräkna:

$$\vec{F}(x,y,0) = (xy^2, x^2y, 0),\ \vec{N}(x,y,0) = (0,0,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{N} = 0 \Rightarrow \int\int_{Y_1} \vec{F}\cdot\vec{N}dS = 0.$$

Genom att använda Gauß sats för halvellipsoiden K får vi

$$\int\int_Y \vec{F}\cdot\vec{N}dS + \underbrace{\int\int_{Y_1} \vec{F}\cdot\vec{N}dS}_{=0} = \int\int\int_K \operatorname{div}\vec{F}\,dV.$$

Det återstår att beräkna volymintegralen

$$\begin{aligned}
\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dV &= \iiint_K (y^2+x^2-1)dV \\
&= \int_0^{1/2}\Big(\iint_{x^2+y^2\le 1-4z^2}(x^2+y^2-1)dxdy\Big)dz \\
&= 2\pi\int_0^{1/2}\Big(\int_0^{\sqrt{1-4z^2}}(r^2-1)rdr\Big)dz \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{1/2}(r^4-2r^2)\Big|_{r=0}^{\sqrt{1-4z^2}}dz \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{1/2}(1-8z^2+16z^4-2+8z^2)dz \\
&= -\frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Flödet är negativt eftersom produktionen inom området är negativ.

4 Nämnaren i integranden kan faktoriseras som

$$z^3-3z^2+4z-12=(z-3)(z-2i)(z+2i).$$

Integranden är analytisk utanför punkterna: $z=3,\pm 2i$. Bara en av punkterna, nämligen $z=3$, ligger inom cirkeln C. Betrakta funktionen

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2+4}.$$

Integralen som vi är intresserade i kan skrivas som

$$I:=\int_C \frac{z+3}{z^3-3z^2+4z-12}dz=\int_C\frac{f(z)}{z-3}dz$$

och kan beräknas med hjälp av Cauchys formel, eftersom C innesluter $z=3$ och går ett varv moturs:

$$I=2\pi i f(3)=2\pi i\frac{3+2}{3^2+4}=\frac{10}{13}\pi i.$$