MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentamen i
Analys B, 7.5 hp
den 27 befruari 2019

Problemdel

1 Man kan lösa problemet på två olika sätt.

Först konstaterar vi att
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
vilket innebär att man får byta integrationskurva utanför origo.

Förslag 1 Vi byter integrationskurva till den rätta linjen $(s, s), s \in [1, 3]$ som går mellan punkterna $(1, 1)$ and $(3, 3)$. PÅ denna linjen har vi $x^2 - y^2 = 0$ och $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$. Integralen blir lika med noll.

Förslag 2 Genom att integrera differentialekvationerna
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{1}{x}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{y}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$
vi upptäcker att funktionen
$$U(x, y) = \ln \frac{xy}{x^2+y^2}$$
är en potential. Integralen är
$$\int_\gamma \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) = U(3, 3) - u(1, 1) = \ln \frac{9}{9+9} - \ln \frac{1}{1+1} = 0.$$

2 Det räcker att utveckla funktionen $\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{1-z^2} = -\left(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} + \ldots\right)$. Potensserien för f blir
$$f(z) = -z^3 - z^5 - \ldots - z^{2n+1} - \ldots.$$

Konvergensradien kan bestämmas på två olika sätt:

(a) Funktionen f är analytisk för $z \neq \pm 1$. Avståndet från origo till den nårmaste singulăriteten är 1, vilket innebär att konvergensradien är lika med 1.

(b) Den geometriska serien ovan $1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} + \ldots$ konvergerar för $|z^2| < 1$ och divergerar för $|z^2| > 1$. Konvergensradien är lika med 1.

För att bestämma derivator använder vi att koefficienterna i Taylorsutvecklingen ges av
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$
För $n = 0, 1, 2$ får vi
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$
Alla högre derivator kan bestämmas
$$\frac{f'''(0)}{3!} = -1 \Rightarrow f'''(0) = -3!$$
$$\frac{f^{2n}}{2n!} = 0 \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0, \;\; n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$\frac{f^{2n+1}(0)}{(2n+1)!} = -1 \Rightarrow f^{2n+1}(0) = -(2n+1)!, \;\; n = 2, 3, \ldots$$

3 Enligt Stokes sats är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot dx = \int\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot \mathbf{N}dS = \int\int_S (1,0,-1)\cdot \mathbf{N}dS$, där S är ytan $z = 3x^2-2y^2, x^2+y^2 \le 1$, orienterad uppåt. Vi parameteriserar ytan S som $\mathbf{r}(s,t) = (s,t,3s^2-2t^2)$ där s och t uppfyller $s^2+t^2 \le 1$. Normalen till yta ges av

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-6s, 4t, 1).$$

Vi kan beräkna integralen:

$$\int\int_S (1,0,-1)\cdot(-6s,4t,1)dS = \int\int_{x^2+y^2\le 1} (-6s-1)dsdt = \int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} d\varphi(-6r\cos\varphi-1) = -\pi.$$

4 Vi kollar nämnaren och löser ekvationen

$$z^3-8z^2+15z-26=0.$$

Alla rationella lösningar måste vara heltal och dela $26 = 2\times 13$. Möjliga nollställena är: $\pm1, \pm2, \pm13$. Inspektionen ger oss att $z_1 = 2$ är en lösning. Vi delar polynomet med $z-2$

$$z^3-8z^2+15z-26 = (z-2)(z^2-6z+13).$$

Lösningarna till den kvadratiska ekvationen $z^2-6z+13=0$ är

$$z_{2,3} = \frac{6\pm\sqrt{26-4\times 13}}{2} = 3\pm 2i.$$

För alla singulära punkter gäller $|z_j|^2 \le 4^2 = 16$

$$|z_1|^2 = 4,\ |z_{2,3}|^2 = 3^2+2^2 = 13.$$

Alla singulära punkter ligger inom cirkeln. Betrakta en följd av cirklar C_R av radie $R\ge 4$. Integralerna över cirklarna är lika med varandra eftersom funktionen är analytisk mellan varje två cirklar. Låt oss uppskata integral över en cirkel C_R där R är tillräckligt stor

$$\left|\int_{C_R}\frac{z+2}{z^3-8z^2+15z-26}dz\right| \le 2\pi R\frac{R+2}{R^3-8R^2-25R-26} \to_{R\to\infty} 0.$$

Slutsatsen är att integralen måste vara lika med 0.