MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 21 augusti 2019

Problemdel

1 Betrakta följande potensserier

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2} x^k$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k}{1+k^2} x^k$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k x^k}{k!}$;

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+e^{-k}} x^k$;

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} 7^k (x-3)^k$.

Bestäm konvergensradie för **varje** potensserie. **(5p)**

2 En student vill kolla om Gauß sats stämmer. Hen betraktar vektorfältet $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ och ytan som består av två delar: ytan Y_1 och locket Y_2:

$$Y_1 = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2 \right\};$$

$$Y_2 = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 \right\}.$$

Visa att Gauß sats stämmer för vektorfältet $\vec{F}$ och kroppen som begränsas av ytorna Y_1 och Y_2, *d.v.s.* beräkna alla integraler som ingår i Gauß sats och kolla att likheten stämmer. **(5p)**

3 Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

längs kurvan γ som ges av

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = h\left(\frac{t}{2\pi}\right)^3$$

från $(1,0,0)$ till $(1,0,h)$, där $h \in \mathbb{R}$ är en parameter. **(5p)**

4 a) Beräkna integralen:

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+4} dz,$$

där Γ är kurvan som består av intervallet $[-R, R]$ på reella axeln och halvcirkeln $|z| = R$, för $\operatorname{Im} z \geq 0$ orienterat moturs, där R är ett stort positivt tal, särskild $R > 2$.

b) Använd resultatet i a) för att bestämma:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+4} dx.$$

(5p)

Var god vänd!

Teoridel

5 Formulera satsen om variabelbyte i dubbelintegraler. Ge ett resonemang som troliggör satsen. Resonemanget skall särskilt förklara varför funktionaldeterminanten beskriver en lokal areaförstoring. **(4p)**

6 Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. Visa att om en följd av kontinuerliga funktioner konvergerar likformigt i ett intervall $[a, b]$, så är gränsvärdet av integralerna (över $[a, b]$) lika med integralen av gränsfunktionen. **(4p)**

7 Låt $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vara en funktion definierad i den öppna enhetscirkelskivan $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Avgör för varje av de följande påståenden om den är sann eller falsk.

(a) Funktionen f är kontinuerlig. $\Longrightarrow$ Funktionen f är analytisk.

(b) Funktionen f är analytisk. $\Longrightarrow$ Funktionen f är kontinuerlig.

Motivera dina svar antingen med ett motexempel eller med ett kort resonemang. Du kan använda satser från kursen utan bevis, men vi måste veta vilken sats du syftar på (dvs "enligt satsen från kursen" är ej tillräckligt!). **(2p)**

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning onsdag den 28 augusti kl 11:30 i sal 16, därefter i rum 204, hus 6.