MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 9 januari 2020, kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

För godkänt resultat krävs 15 poäng (inklusive bonus). Dessutom krävs det minst 1 poäng på två av teorifrågorna och sammanlagt minst 4 poäng på teoridelen.

Problemdel

1. Låt $D = \{(x, y) : 9 \leq x^2 + 3y^2 \leq 12 \text{ och } 1 \leq y^2 - x^2 \leq 2\}$.

   (a) Skissa området D.

   (b) Beräkna integralen $\iint_D \frac{xy}{x^2 + 3y^2}\, dxdy$.

   (c) Beräkna integralen $\iint_D \frac{|xy|}{x^2 + 3y^2}\, dxdy$.

   Om du genomför ett variabelbyte i dina beräkningar, motivera ordentligt ditt val (dvs varför transformationen verkligen är ett variabelbyte mellan respektive områden.) 5 p

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ över fältet

   $$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xz}{x^2 + y^2}, \frac{2yz}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) + 1\right)$$

   och då kurvan γ är $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ och $z = t$ där t går från 0 till 2π. 5 p

3. Beräkna flödesintegralen

   $$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

   där $\mathbf{F} = (xy, x^2z, z)$, Y är ytan $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1, -1 \leq z \leq 2\}$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som pekar *mot* z-axeln. 5 p

4. Låt $f_n(x) = e^{-nx}$.

   (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar funktionsföljden (f_n) punktvis?

   (b) Ange en mängd $D \subset \mathbb{R}$ sådan att (f_n) konvergerar likformigt på D.

   (c) Är (f_n) likformigt konvergent på $[0, \infty)$?

   Motivera dina svar! 5 p

Teoridel

5. Formulera satsen om *variabelbyte i trippelintegraler.* 4 p
   Ange även ett resonemang som förklarar hur formeln för variabelbyte i multipelintegraler relaterar till motsvarande formel för enkelintegraler. Förklara speciellt varför flervariabelversionen innehåller beloppstecken som inte behövs i en variabel.

Var god vänd!

6. Definiera begreppet *likformigt konvergent funktionsserie.* 4 p

   Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie R som är positiv och ändlig (dvs serien konvergerar absolut för alla $|x| < R$ och divergerar för alla $|x| > R$) så konvergerar serien likformigt i varje intervall $[-S, S]$, där $S \in]0, R[$.

7. Låt f vara en komplexvärd funktion i en öppen delmängd av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$.

   (a) Ange definitionen av en analytisk funktion.

   (b) Ange två egenskaper hos f som är ekvivalenta till egenskapen analytisk.

   (c) Bestäm alla *reellvärda* analytiska funktioner f i $\mathbb{C}$, dvs bestäm alla analytiska funktioner $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ med imaginärdel $v(x, y) = 0$ för alla x och y (där som vanligt $z = x + iy$). 2 p

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning onsdag 15/1, kl 14-14:30 i sal 16, därefter i rum 204, hus 6.