MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 9 januari 2020, kl 9.00-14.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

Problemdel

1. *Låt* $D = \{(x, y) : 9 \leq x^2 + 3y^2 \leq 12$ *och* $1 \leq y^2 - x^2 \leq 2\}$.

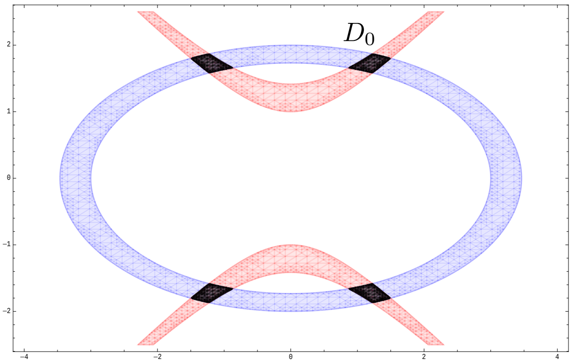
   (a) *Skissa området* D.

   (b) *Beräkna integralen* $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+3y^2}\, dxdy$.

   (c) *Beräkna integralen* $\iint\limits_D \frac{|xy|}{x^2+3y^2}\, dxdy$.

Om du genomför ett variabelbyte i dina beräkningar, motivera ordentligt ditt val (dvs varför transformationen verkligen är ett variabelbyte mellan respektive områden.) *5 p*

(a) Området D begränsas av två ellipser, nämligen $x^2 + 3y^2 = 12$ och $x^2 + 3y^2 = 9$, samt två hyperbler, nämligen $y^2 - x^2 = 1$ och $y^2 - x^2 = 2$. Området är ej sammanhängande utan består av fyra komponenter, en i varje kvadrant. Dessa är symmetriska, dvs om en punkt (x_0, y_0) ligger i D så ligger även spegelpunkterna $(\pm x_0, \pm y_0)$ i D.



(b) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+3y^2}\, dxdy = 0$, ty området är symmetriskt (som beskrivit i (a)) samt integranden är udda i både x och y.

(c) Om vi betecknar den komponenten av D som ligger i första kvadranten med D_0 så har vi, igen av symmetriskäl och eftersom integranden är nu jämn i båda variablerna, att

$$I := \iint\limits_D \frac{|xy|}{x^2+3y^2}\, dxdy = 4 \iint\limits_{D_0} \frac{xy}{x^2+3y^2}\, dxdy.$$

För att beräkna integralen inför vi nya variabler

$$s = x^2 + 3y^2 \qquad \text{och } t = -x^2 + y^2.$$

Om $(x, y) \in D_0$, särskilt alltså $x, y > 0$, så får vi genom att lösa ut x och y att transformationen är bijektiv mellan D_0 och $E := \{(s, t) : 9 \leq s \leq 12, 1 \leq t \leq 2\}$, dessutom är den uppenbarligen av klass C^1. Vi beräknar funtionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(s,t)} = \frac{1}{\frac{d(s,t)}{d(x,y)}} = \left(\begin{vmatrix} 2x & 6y \\ -2x & 2y \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{16xy}.$$

Särskilt ser vi att funtionaldeterminanten inte är noll i området. Därmed är transformationen ett variabelbyte mellan D_0 och E. Vi får

$$I = 4\iint_E \frac{xy}{s}\frac{1}{|16xy|}dsdt = \frac{1}{4}\int_1^2 (\int_9^{12}\frac{1}{s}ds)dt = \ldots = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}.$$

Svar: a) se bilden b) 0 c) $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$.

2. *Beräkna kurvintegralen* $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *över fältet*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2}, \frac{2yz}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2)+1\right)$$

och då kurvan γ *är* $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ *och* $z = t$ *där* t *går från* 0 *till* 2π. *5 p*

Man ser lätt att funktionen $U(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2)+z$ är en potential för fältet $\mathbf{F}$ i $\mathbb{R}\setminus\{(0,0,t) : t\in\mathbf{R}\}$ (OBS för en fullständig lösning måste detta visas!). Eftersom kurven ligger i detta område beräknas integralen direkt som

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(1,0,2\pi) - U(1,0,0) = 2\pi.$$

Svar: 2π

3. *Beräkna flödesintegralen*

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

där $\mathbf{F} = (xy, x^2z, z)$, Y *är ytan* $\{x^2+y^2-z^2 = 1, -1\le z\le 2\}$, *och* $\mathbf{N}$ *är den enhetsnormal som pekar mot* z*-axeln.* *5 p*

Ytan Y är en del av en enmantlad hyperboloid (med z-axeln som symmetriaxeln), som är orienterad sådan att normalvektorn pekar inåt.

För att kunna använda Gauss sats lägger vi till ett lock L_2 (det är en cirkelskiva med normalen parallellt med z-axeln och nedåt orienterad) samt botten L_{-1} (det är en cirkelskiva med normalen parallellt med z-axeln och uppåt orienterad) . Med beteckningen $K := \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2\le 1, -1\le z\le 2\}$ får vi

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{L_{-1}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{L_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K -\mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

Observera minustecknet i högerledet som kommer in pga orienteringen!

För att beräkna integralen över botten L_{-1} använder vi parametriseringen $\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ -1\end{pmatrix}$ för $x^2+y^2\le 2$ och med enhetsnormalen $\mathbf{N} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (så att den också pekar inåt). Vi får då

$$\iint_{L_{-1}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \begin{pmatrix}*\\ *\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dxdy = -2\pi.$$

Analogt får man för locket $\iint_{L_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \ldots = -10\pi$. För trippelintegralen får vi

$$\iiint_K -\mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz = -\iiint_K (y+1)dxdydz = -\iiint_K 1dxdydz.$$

Här har vi använt oss av symmetrin av integrationsområdet samt att y är en udda funktion. En möjlighet att gå vidare är att skriva integralen som en itererad integral

$$= -\int_{-1}^2 \Big(\iint\limits_{x^2+y^2\le 1+z^2} 1\,dxdy\Big)dz = \ldots = -6\pi.$$

Sammanlagt blir det alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = -\iint_{L_{-1}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS - \iint_{L_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iiint_K -\mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz = 2\pi + 10\pi - 6\pi = 6\pi.$$

Svar: $\underline{6\pi}$

4. *Låt $f_n(x) = e^{-nx}$.*

   (a) *För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar funktionsföljden (f_n) punktvis?*

   (b) *Ange en mängd $D \subset \mathbb{R}$ sådan att (f_n) konvergerar likformigt på D.*

   (c) *Är (f_n) likformigt konvergent på $[0, \infty)$?*

   Motivera dina svar! *5 p*

   (a) Vi har

$$\lim_{n\to\infty} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}.$$

Alltså är funktionsföljden (f_n) punktvis konvergent för alla $x \geq 0$ (och gränsfunktionen blir då $f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$).

(b) f_n konvergerar likformigt t.ex. i intervallet $[a, \infty)$ där $a > 0$, ty för $x \in [a, \infty)$ kan vi uppskatta

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na}$$

och får därmed att

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| \leq e^{-na} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

(c) Nej, konvergensen på $[0, \infty)$ kan inte vara likformig, ty gränsfunktionen inte är kontinuerlig på denna mängd.

Alternativt kunde man även kolla $\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 0} e^{-nx} = 1$ för alla n, alltså ser vi även här att konvergensen inte är likformig.

Teoridel

5. *Formulera satsen om variabelbyte i trippelintegraler.* *4 p*

   Ange även ett resonemang som förklarar hur formeln för variabelbyte i multipelintegraler relaterar till motsvarande formel för enkelintegraler. Förklara speciellt varför flervariabelversionen innehåller beloppstecken som inte behövs i en variabel.

Låt E och D vara kvadrerbara delmängder av $\mathbb{R}^3$ och $\vec{g} : E \to D$ en bijektiv C^1-funktion med funktionaldeterminaten $\frac{d(\vec{g})}{d(\vec{u})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \neq 0$. Då är

$$\iiint_D f(\vec{x})dx_1dx_2dx_3 = \iiint_E f(\vec{g}(\vec{u})) \left|\frac{d(\vec{g})}{d(\vec{u})}\right| du_1du_2du_3$$

om respektive funktioner är integrerbara. (Se även sida 288 i PB.)

I envariabelsituationen skulle motsvarande sats se ut så här: Låt J och I vara intervall och $g : J \to I$ en bijektiv C^1-funktion med $g'(u) \neq 0$. Då är

$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(g(u))|g'(u)|\,du.$$

Den "vanliga" (dvs från matematik I kända) substitutionsformeln är dock

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(u))g'(u)\,du.$$

Se sida 259 i PB för att se hur man skriver den ena om till den andra.

6. *Definiera begreppet likformigt konvergent funktionsserie.* *4 p*
Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie R som är positiv och ändlig (dvs serien konvergerar absolut för alla $|x| < R$ och divergerar för alla $|x| > R$) så konvergerar serien likformigt i varje intervall $[-S, S]$, där $S \in]0, R[$.

En funktionsserie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerar likformigt i D om partialsummorna $s_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ konvergerar likformigt i D (mot $s(x)$), dvs om

$$\sup_{x\in D} |s_N(x) - s(x)| \to 0 \qquad \text{då } N \to \infty.$$

För att visa likformig konvergens av potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $[-S, S]$ använder vi oss av Weierstrass majorantsats. Vi har

$$|a_k x^k| \le |a_k S^k|$$

och vet att serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k S^k|$ är konvergent (ty $S < R$) och därmed är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ likformigt konvergent i $[-S, S]$.

7. *Låt f vara en komplexvärd funktion i en öppen delmängd av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$.*
   - *(a) Ange definitionen av en analytisk funktion.*
   - *(b) Ange två egenskaper hos f som är ekvivalenta till egenskapen analytisk.*
   - *(c) Bestäm alla reellvärda analytiska funktioner f i $\mathbb{C}$, dvs bestäm alla analytiska funktioner $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ med imaginärdel $v(x, y) = 0$ för alla x och y (där som vanligt $z = x + iy$).* *2 p*

(a) Definition 3.1 i kompendiet.
(b) Följande egenskaper är ekvivalenta med analytiskt (i lämpliga områden):

- f är komplext deriverbar (Sats 3.1)
- Kurvintegralen över f är oberoende av vägen i enkelt sammanhängande områden (Sats 3.2)
- f kan kring varje punkt utvecklas i en potensserie med positiv konvergensradie (Sats 9.1 och 9.2)

(c) Om $v(x, y) = 0$ blir de Cauchy-Riemann differentialekvationer $u'_x = 0$ och $u'_y = 0$ vilket leder till $u(x, y) = c$ för någon reell konstant. Vi får alltså att de enda reellvärda analytiska funktioner är konstanta funktioner.