MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 13 februari 2020, kl 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

För godkänt resultat krävs 15 poäng (inklusive bonus). Dessutom krävs det minst 1 poäng på två av teorifrågorna och sammanlagt minst 4 poäng på teoridelen.

Problemdel

1. (a) Beräkna 3 p

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \sin(e^x)dx \Big) dy + \int_1^e \Big(\int_{\ln y}^1 \sin(e^x)dx \Big) dy.$$

   Tips: Att rita integrationsområdet och byta integrationsordningen kan vara en möjlighet att angripa problemet.

   (b) Beräkna volymen av kroppen 2 p

$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ z \leq 1,\ x+y > 0\}.$$

2. Verifiera Stokes sats för vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, x^2, y^2)$ och ytan Y given genom

$$(x-z)^2 + (y+z)^2 = z^2 \quad \text{för } 0 \leq z \leq 1.$$

   Dvs, beräkna kurvintegralen $\int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ både direkt och med hjälp av Stokes sats. Av din lösning ska tydligt framgå hur du väljer orientering. 5 p

3. Betrakta 5 p

$$\int_\Gamma \frac{x+y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x+y}{x^2+y^2}dy.$$

   (a) Beräkna kurvintegralen, där kurvan Γ går i halvplanet $y \geq 0$ från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ längs superellipsen $x^6 + 3y^6 = 1$.

   (b) Ange en kurva Γ sådan att kurvintegralen blir noll och motivera ditt val.

4. (a) Betrakta serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$

   i. Bestäm seriens konvergensradie.

   ii. Ange en mängd $M \subset \mathbb{C}$ sådan att serien konvergerar likformigt i M.

   (b) Betrakta serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} z^{2n}.$$

   i. Bestäm seriens konvergensradie R.

   ii. Bestäm värdet på serien för $|z| < R$.

   iii. Konvergerar serien även för alla $z \in \mathbb{C}$ med $|z| = R$?

   Motivera dina svar! 5 p

Teoridel

5. Formulera och bevisa *Greens formel.* (Om ditt bevis innehåller flera steg av liknande typ behöver du inte utföra dessa flera gånger). 4 p

Var god vänd!

6. Definiera begreppet analytisk funktion.

   Låt f vara en funktion sådan att dess realdel $u(x, y)$ och imaginärdel $v(x, y)$ är av klass C^1 (som funktioner av x och y). Visa att den komplexa derivatan $f'(z)$ existerar om och endast om u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. 4 p

7. Låt f vara en funktion som är analytisk i en öppen mängd Ω som innehåller den slutna enhetscirkelskivan $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. 2 p

   Visa: Om $|f(z)| \leq 1$ för alla z med $|z| = 1$, så gäller även $|f(0)| \leq 1$.

   Tips: Cauchys integralformel och triangelolikheten för integraler kan vara hjälpsamma.

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning tisdag 25/2, kl 12-12:30 i rum 209, därefter i rum 204, hus 6.