MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys B, 7.5 hp
den 13 februari 2020, kl 9.00-14.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

Problemdel

1. *(a) Beräkna* *3 p*

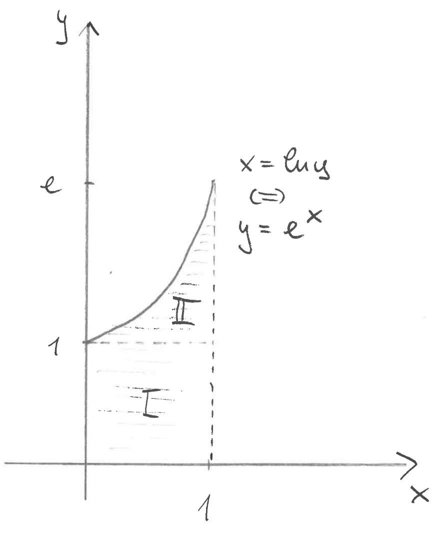
$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \sin(e^x)dx \Big) dy + \int_1^e \Big(\int_{\ln y}^1 \sin(e^x)dx \Big) dy.$$

Tips: Att rita integrationsområdet och byta integrationsordningen kan vara en möjlighet att angripa problemet.

(b) Beräkna volymen av kroppen *2 p*

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \leq 1,\ x + y > 0\}.$$

(a) Vi ritar båda integrationsområden, där I beteckna området för den första integralen och II området för den andra,



och ser att det sammanlagt är området under grafen $y = e^x$ in intervallet $0 < x < 1$. Om vi byter integrationsordningen får vi alltså

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \sin(e^x)dx \Big) dy + \int_1^e \Big(\int_{\ln y}^1 \sin(e^x)dx \Big) dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{e^x} \sin(e^x)dy \Big) dx$$

och därmed

$$\int_0^1 e^x \sin(e^x)dx = \Big[-\cos(e^x) \Big]_{x=0}^1 = \cos(1) - \cos(e).$$

(b) Kroppen K består av en halv boll med radie $\sqrt{2}$ (ty $x + y > 0$), varifrån den övre delen $z > 1$ har tagits bort. Det finns olika möjligheter att beräkna volymen, till exempel:

$$
\begin{aligned}
V(K) &= \iint\limits_{\substack{x+y>0\\ x^2+y^2\le 2}} \Big(\int_{-\sqrt{2-(x^2+y^2)}}^{1} dz\Big)dxdy = \iint\limits_{\substack{x+y>0\\ x^2+y^2\le 2}} \Big(1+\sqrt{2-(x^2+y^2)}\Big)dxdy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \Big(1+\sqrt{2-r^2}\Big) r dr d\varphi = \ldots = \frac{\pi}{3}(3+2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Svar: a) $\underline{\cos(1)-\cos(e)}$ b) $\underline{\frac{\pi}{3}(3+2\sqrt{2})}$.

2. *Verifiera Stokes sats för vektorfältet* $\mathbf{F}(x,y,z)=(z^2,x^2,y^2)$ *och ytan* Y *given genom*

$$(x-z)^2+(y+z)^2=z^2 \quad \textit{för } 0\le z\le 1.$$

Dvs, beräkna kurvintegralen $\int_{\partial Y}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *både direkt och med hjälp av Stokes sats. Av din lösning ska tydligt framgå hur du väljer orientering.* *5 p*

För att åskadliggöra ytan betraktar vi först snitten med planen $z=z_0$ för $0\le z_0\le 1$. Dessa är cirklar med radie z_0 och medelpunkt $(z_0,-z_0)$. Därmed är ytan en "sned tratt" med spetsen i origo (då $z_0=0$) och övre randen cirkeln $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ i planet $z=1$. Den "nedre delen av randen" består endast av origo och bidrar därmed inte till integralerna. Resterande randen till ytan Y kan parametriseras som

$$\mathbf{r}(t)=\begin{pmatrix}1+\cos t\\ -1+\sin t\\ 1\end{pmatrix} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Med detta val är randens orientering matematiskt positivt uppifrån sett. Därmed måste vi välja ytans normalvektor så att den visar inåt tratten, dvs med negativ z-komponent.

Vi beräknar först kurvintegralen

$$\int_{\partial Y}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}1\\ (1+\cos t)^2\\ (-1+\sin t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}dt=\ldots=2\pi.$$

För att beräkna flödesintegralen $\iint_Y \mathbf{rotF}\cdot d\mathbf{S}$ parametriserar vi ytan Y som

$$\mathbf{r}(\varphi,z)=\begin{pmatrix}z+z\cos t\\ -z+z\sin t\\ z\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le z\le 1\end{matrix} \quad ,$$

och beräknar normalvektorn

$$\mathbf{r}'_\varphi\times\mathbf{r}'_z=\ldots=\begin{pmatrix}z\cos\varphi\\ z\sin\varphi\\ z(\sin\varphi-\cos\varphi-1)\end{pmatrix}.$$

Vi observerar dock att denna vektor är utåtriktat, dvs vi måste använda $-\mathbf{r}'_\varphi\times\mathbf{r}'_z$ som normalvektor i ytintegralen, som då blir

$$\iint_Y \mathbf{rotF}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}z^2\\ z^2(1+\cos\varphi)^2\\ z^2(-1+\sin\varphi)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-z\cos\varphi\\ -z\sin\varphi\\ -z(\sin\varphi-\cos\varphi-1)\end{pmatrix}d\varphi dz=\ldots=2\pi.$$

Därmed har vi i detta exempel verifierat $\iint_Y \mathbf{rotF}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\partial Y}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

3. *Betrakta* *5 p*

$$\int_\Gamma \frac{x+y}{x^2+y^2}dx+\frac{-x+y}{x^2+y^2}dy.$$

(a) *Beräkna kurvintegralen, där kurvan Γ går i halvplanet $y \geq 0$ från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ längs superellipsen $x^6 + 3y^6 = 1$.*

(b) *Ange en kurva Γ sådan att kurvintegralen blir noll och motivera ditt val.*

Vi börjar med att kolla fältet (Q, P), och observerar att både P och Q är godtyckligt många gånger deriverbara i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ och vi ser efter lite beräkning att $Q'_x - P'_y = 0$ där. Detta innebär att kurvintegralen är oberoende av vägen i varje öppet enkelt sammanhängande område som inte innehåller origo, t.ex. i $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$, dvs hela planet utom den icke-positiva y-axeln.

(a) Enligt observationen ovan kan får vi samma värde för kurvintegralen om vi ersätta den givna kurvan Γ med halvcirkeln γ från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ i det övre halvplanet, dvs $\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ då $0 \leq t \leq \pi$. (OBS: Både Γ och γ ligger inom området Ω.) Vi får alltså

$$\int_\Gamma ... = \int_\gamma ... = \int_0^\pi (\cos t + \sin t)(-\sin t)dt + (-\cos t + \sin t)(\cos t)dt = \ldots = -\pi.$$

(b) Enligt observationen ovan kan vi välja varje enkel sluten kurva Γ som ligger helt inom Ω, t.ex. cirkellinjen $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 1$.

OBS: Det går inte att ersätta kurvan i (a) med den raka linjen längs x-axeln. Då skulle vägen gå rakt igenom singulariteten!

4. (a) *Betrakta serien*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$

i. Bestäm seriens konvergensradie.

ii. Ange en mängd $M \subset \mathbb{C}$ sådan att serien konvergerar likformigt i M.

Vi använder oss av formeln för konvergensradien

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Eftersom $R = \frac{1}{4}$ vet vi att serien konvergerar likformigt i varje sluten cirkelskiva $|z| \leq s$ med $0 < s < \frac{1}{4}$. Men även på varje annan kompakt mängd M som är delmängd av den öppna cirkelskivan $|z| < \frac{1}{4}$ är konvergensen likformigt.

(b) *Betrakta serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} z^{2n}.$$

i. Bestäm seriens konvergensradie R.

ii. Bestäm värdet på serien för $|z| < R$.

iii. Konvergerar serien även för alla $z \in \mathbb{C}$ med $|z| = R$?

Motivera dina svar! *5 p*

i. Vi ämnar att använda kvotkritiet och betrakta därför

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 9^{n+1}} z^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} z^{2n}} \right| = \ldots = \frac{|z|^2}{9} \cdot \frac{n}{n+1} \to \frac{|z|^2}{9} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Enligt kvotkriteriet konvergerar serien absolut om $\frac{|z|^2}{9} < 1$ (samt divergerar om $\frac{|z|^2}{9} > 1$), därmed är konvergensradien $R = 3$.

ii. Vi sätter $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} z^{2n}$ för $|z| < 3$. Pga regler för potenserier får vi

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} (2n) z^{2n-1} = \ldots = -\frac{2z}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{9} \right)^k = -\frac{2z}{9} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{9}} = -\frac{2z}{9 + z^2}.$$

Integrationen ger

$$f(z) = c - \ln(9 + z^2),$$

med en integrationskonstant c, som är dock $c = 0$, ty $f(0) = 0$. Alltså har vi

$$f(z) = -\ln(9 + z^2) \text{ för } |z| < 3.$$

iii. Om vi väljer $z = 3i$ får vi den divergenten serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 9^n} (3i)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Svar: (a) $\underline{\text{i. } R = \frac{1}{4}, \text{ ii. t.ex. } |z| < \frac{1}{6}}$ (b) $\underline{\text{i. } R = 3, \text{ ii. } -\ln(9 + z^2), \text{ iii. nej}}$.

OBS: I (i) kan vi inte använda formeln för konvergensradien på samma sätt som i (a), ty gränsvärdet inte finns!

Teoridel

5. *Formulera och bevisa Greens formel. (Om ditt bevis innehåller flera steg av liknande typ behöver du inte utföra dessa flera gånger).* *4 p*

   Se boken.

6. *Definiera begreppet analytisk funktion.*

   Låt f vara en funktion sådan att dess realdel $u(x, y)$ och imaginärdel $v(x, y)$ är av klass C^1 (som funktioner av x och y). Visa att den komplexa derivatan $f'(z)$ existerar om och endast om u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. *4 p*

   Se kompendiet, Definition 3.1 och Sats 3.1.

7. *Låt f vara en funktion som är analytisk i en öppen mängd Ω som innehåller den slutna enhetscirkelskivan $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$.* *2 p*

   Visa: Om $|f(z)| \leq 1$ för alla z med $|z| = 1$, så gäller även $|f(0)| \leq 1$.

   Tips: Cauchys integralformel och triangelolikheten för integraler kan vara hjälpsamma.

   Vi börjar med att skriva ner Cauchys integralformel för $f(0)$. Då får vi

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 0} d\zeta$$

   och om vi parametriserar kurvan $|z| = 1$ med $z(t) = e^{it}$ så blir det

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt.$$

   Nu använder vi triangelolikheten och förutsättningen $|f(e^{it})| \leq 1$:

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

   OBS: Man kan också använda triangelolikheten direkt utan att parametrisera, men det känns tydligare så.