MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 1 juni 2020, kl 9.00-14.00
Inlämning via kurssiden innan kl 16

Ingen kommunikation under skrivningen är tillåten!

Angivna poäng i tentalydelsen nedan anger maximala poäng för den skriftliga lösningen under beaktande av den muntliga redovisningen. För godkänt resultat krävs 15 poäng på den skriftliga tentan efter muntlig redovisning (inklusive bonus), där minst 4 poäng är från teoridelen, dvs frågorna i blå som dessutom är markerade med T.

Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

0. Låt parametern B vara lika med sista siffran i ditt personnummer.

1. Betrakta integralen 5 p

$$\iiint_D \frac{4z}{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}dxdydz.$$

   (a) Använd rymdpolära koordinater för att beräkna integralen ovan över mängden

$$D=\{(x,y,z):1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4, x+y\leq 0,\ z\geq 0\}.$$

   (b) Bestäm värdet av integralen över mängden

$$D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 49\}.$$

2. Betrakta

$$\int_\gamma \left(\frac{\pi\cos(\pi x)}{x^2+y^2}-\frac{2x\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2}+y+B\right)dx+\left(-\frac{2y\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2}+x\right)dy.$$

   OBS: Använd ditt värdet på B som du har bestämt i fråga 0 ovan.

   (a) Beräkna kurvintegralen, där kurvan γ går medurs längs ellipsen $x^2+9y^2=9$ från punkten $(0,1)$ till punkten $(-3,0)$. 5 p

   (b) Ange alla satser som du behöver i (a) och förklara hur du har använt dem. T 2 p
   Anmärkning: Om i satsens formulering förekommer t.ex. ett område Ω, så ange hur du har valt Ω i exemplet, samt redovisa varför alla satsens förutsättningar är uppfyllda.

3. (a) Formulera *Gauss sats* med alla förutsättningar. T 2 p

   (b) Verifiera Gauss sats för fältet $\mathbf{u}(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$ och kroppen 5 p

$$K=\{(x,y,z):x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq B+1\},$$

   dvs beräkna både flödesintegralen och trippelintegralen och jämför svaret.
   OBS: Använd ditt värde av B som du har bestämt i fråga 0 ovan.

4. (a) Betrakta potensserien 3 p

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}x^n.$$

   i. Bestäm seriens konvergensradie.
   ii. Ange alla punkter $x\in\mathbb{R}$ sådana att serien konvergerar.
   iii. Ange en mängd $M\subset\mathbb{R}$ sådan att serien konvergerar likformigt i M.

Var god vänd!

(b) Betrakta serien 2 p

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}(x-1)^n.$$

i. Bestäm seriens konvergensradie.

ii. Ange alla punkter $x \in \mathbb{R}$ sådana att serien konvergerar.

(c) Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. T 2 p

5. Låt R_1 och R_2 vara konvergensradien till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, respektive $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Visa: Om $|a_n| \leq |b_n|$ för alla $n \geq 0$ så är $R_1 \geq R_2$. T 2 p

6. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ vara vektorfältet T 2 p

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2(xz+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(yz-x)}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2) \right).$$

och γ_1, γ_2 och γ_3 kurvorna

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\
\gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2) \\
\gamma_3(t) &= (3\cos(t)+6, 3\sin(t), 3).
\end{aligned}$$

Vektorfältet $\mathbf{F}$ är rotationsfritt i sin definitionsmängd, dvs utanför z-axeln, men det behöver du inte visa!

(a) Visa, med hjälp av Stokes sats, att $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(b) Följer ur Stokes sats även $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$?

Kallelse till den muntliga redovisningen kommer via epost (studentaddressen).

Information om tentaåterlämningen kommer på kurssidan.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!