MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 26 augusti 2020, kl 9.00-14.00
Inlämning via kurssiden innan kl 16

Ingen kommunikation under skrivningen är tillåten!

Angivna poäng i tentalydelsen nedan anger maximala poäng för den skriftliga lösningen under beaktande av den muntliga redovisningen. För godkänt resultat krävs 15 poäng på den skriftliga tentan efter muntlig redovisning, där minst 4 poäng är från teoridelen, dvs frågorna i blå som dessutom är markerade med T.

Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

0. Låt parametern b vara lika med nästsista siffran i ditt personnummer.

1. (a) Skissa områdena

$$D_1 = \{(x,y) : 1 \leq x^2 y \leq 2,\ x^2 \leq y \leq x^2 + b + 1\}$$

och

$$D_2 = \{(x,y) \in D_1, x > 0\}.$$

OBS: Använd ditt värdet på b som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(b) Betrakta nya variabler (u,v) med

$$\begin{cases} u = x^2 y \\ v = y - x^2 \end{cases}.$$

Beräkna funtionaldeterminanten $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}$.

(c) Beräkna integralerna

$$\iint_{D_1} x^3 y(y+x^2)e^{y-x^2}\,dxdy \qquad \text{och} \qquad \iint_{D_2} x^3 y(y+x^2)e^{y-x^2}\,dxdy.$$

5 p

2. (a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{2xy}{1+x^4y^2} - xy\right)dx + \frac{x^2}{1+x^4y^2}dy$$

där kurvan $\mathcal{C}$ går från punkten $(0,-2)$ till punkten $(0,2)$ i höger halvplanet längs cirkeln med medelpunkt i origo och radie 2. 5 p

(b) Formulera alla satser som du använder i (a) och förklara hur du har använt dem. T 2 p

Anmärkning: Om i satsens formulering förekommer t.ex. ett område Ω, så ange hur du har valt Ω i exemplet, samt redovisa varför alla satsens förutsättningar är uppfyllda.

3. (a) Formulera *Stokes sats* med alla förutsättningar. T 2 p

(b) Verifiera Stokes sats för ytan $Y = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - 2z = 0,\ z \leq 2\}$ och fältet 5 p

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

dvs beräkna både flödesintegralen och kurvintegralen och jämför svaret. Redovisa hur du väljer orienteringen!

Var god vänd!

4. (a) Beräkna kurvintegralen 2 p

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+9)(z-1)}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade cirkeln $|z-1+2i|=3$.

(b) Beräkna kurvintegralen 2 p

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

(c) Beräkna kurvintegralen 1 p

$$\int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

(d) Definiera begreppet analytisk funktion. Formulera Cauchys integralformel och förklara för en av integralerna ovan hur den används där. T 2 p

5. Låt $\mathbf{F}$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. T 2 p

(a) Ange definitionen av ett *potentialfält* samt av att en öppen mängd är *enkelt sammanhängande*.

(b) Ange tillräckliga villkor för att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i Ω. Är dessa villkor även nödvändiga?

(c) Ange ett exempel på en öppen, sammanhängande, men ej enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$.

6. Låt $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ vara en funktionsserie, låt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ vara en konvergent talserie, och låt följden $(b_k)_{k\geq 1}$ vara begränsad.

Visa: Om $|f_k(t)| \leq c_k$ för alla $t \in I$ och alla $k \geq 1$ så är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot f_k(t)$ likformigt konvergent i I. T 2 p

Kallelse till det muntliga samtalet kommer via epost (studentaddressen).

Även informationen om tentaåterlämningen kommer via epost.

Vid frågor kontakta: Annemarie Luger (luger@math.su.se)

Lycka till!