MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys B, 7.5 hp
26 augusti 2020

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. Låt parametern b vara lika med nästsista siffran i ditt personnummer.

1. *(a) Skissa områdena*

$$D_1 = \{(x, y) : 1 \leq x^2y \leq 2,\, x^2 \leq y \leq x^2 + b + 1\}$$

och

$$D_2 = \{(x, y) \in D_1, x > 0\}.$$

OBS: Använd ditt värdet på b som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(b) Betrakta nya variabler (u, v) med

$$\begin{cases} u = x^2y \\ v = y - x^2 \end{cases}.$$

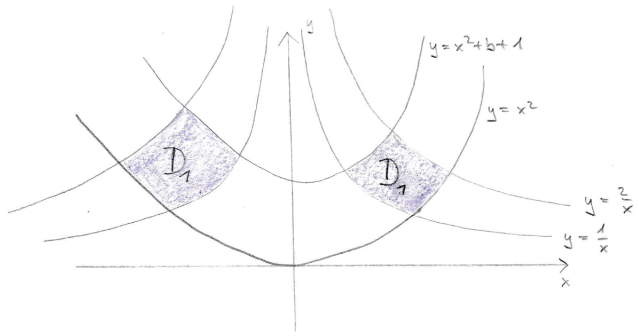
Beräkna funtionaldeterminanten $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}$.

(c) Beräkna integralerna

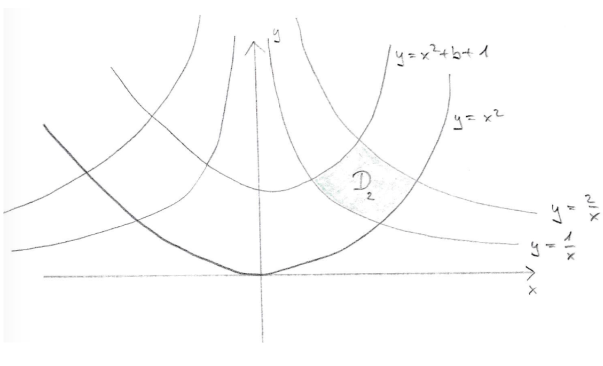
$$\iint_{D_1} x^3y(y + x^2)e^{y-x^2}\, dxdy \qquad \text{och} \qquad \iint_{D_2} x^3y(y + x^2)e^{y-x^2}\, dxdy.$$

5 p

(a) Den första olikheten $1 \leq x^2y \leq 2$ implicerar $x^2 > 0$ och därmed får vi att mängden D_1 beskrivs av olikheterna $\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ och $x^2 \leq y \leq x^2 + b + 1$. Mängden D_1 består alltså av alla punker som ligger både mellan kurvorna $y = \frac{1}{x^2}$ samt $y = \frac{2}{x^2}$ och mellan kurvorna $y = x^2$ samt $y = x^2 + b + 1$, se skizzen, dvs symmetriskt kring y-axeln och ser lite ut som två draperier.



Mängden D_2 består sedan endast av den högre delen, då $x > 0$.



(b)

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 2x(x^2+y).$$

(c) Vi observera att det angivna variabelbytet är en bijektiv $\mathcal{C}^1$-avbildning av D_2 på rektangeln $E := (u,v) : 1 \le u \le 2, 0 \le v \le b+1$ och vi börjar med att beräkna

$$\iint_{D_2} x^3y(y+x^2)e^{y-x^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D_2} x^2ye^{y-x^2}2x(y+x^2)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_E ue^v\,dudv = \ldots = \frac{3}{4}(e^{b+1}-1).$$

Här har vi använt $dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} dudv$ och att $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = 2x(x^2+y) > 0$ för $(x,y) \in D_2$.

Variabelbytet avbilder även den vänstra delen av D_1 bijektivt på E, men i så fall är $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = 2x(x^2+y) < 0$ för $x < 0$. Integralen av vänstra och högra delen tar då ut varandra och vi får

$$\iint_{D_1} x^3y(y+x^2)e^{y-x^2}\,dxdy = 0.$$

Alternativt kunde man också argumentera det eftersom integranden är en udda funktion i x och integrationsområdet D_1 är symmetriskt med avseende på y-axeln.

Svar: a) se bilden b) $2x(x^2+y)$ c) $\iint_{D_1} \ldots = 0$ och $\iint_{D_2} \ldots = \frac{3}{4}(e^{b+1}-1)$.

2. *(a) Beräkna kurvintegralen*

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{2xy}{1+x^4y^2} - xy\right) dx + \frac{x^2}{1+x^4y^2} dy$$

där kurvan $\mathcal{C}$ går från punkten $(0,-2)$ till punkten $(0,2)$ i höger halvplanet längs cirkeln med medelpunkt i origo och radie 2. *5 p*

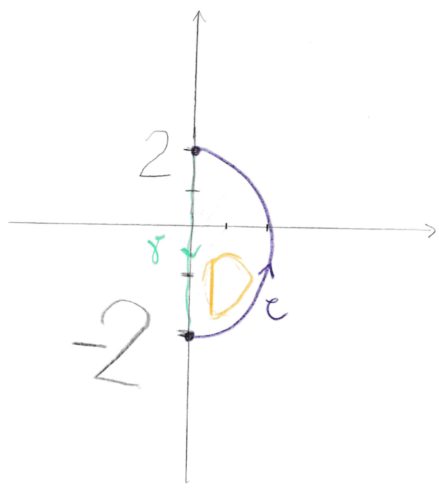
(b) Formulera alla satser som du använder i (a) och förklara hur du har använt dem. *T 2 p*

Anmärkning: Om i satsens formulering förekommer t.ex. ett område Ω, så ange hur du har valt Ω i exemplet, samt redovisa varför alla satsens förutsättningar är uppfyllda.

(a) Vi observerar att fältet $(P,Q) = (\frac{2xy}{1+x^4y^2} - xy, \frac{x^2}{1+x^4y^2})$ är godtyckligt många gånger deriverbar och vi beräknar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \ldots = x.$$

Kurvan $\mathcal{C}$ är en halvcirkel i högerhalvplanet. Vi ämnar att använda Greens sats und betraktar då halva cirkelsskivan $D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2, x > 0\}$. Randen till D utgörs av kurvan $\mathcal{C}$ samt sträckan $\gamma : (0,-t)$ för $t \in [-2,2]$ (minus tecknet är ett sätt att få orienteringen rätt).



Greens sats ger då

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$$

dvs vi har

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx+Qdy = \iint_D xdxdy - \int_\gamma Pdx+Qdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos\varphi dr d\varphi - \int_\gamma 0dx+0dy = \ldots = \underline{\frac{16}{3}}.$$

Kommentar: Alternativt kunde man också dela upp fältet som

$$(P,Q) = (\frac{2xy}{1+x^4y^2} - xy, \frac{x^2}{1+x^4y^2}) = (\frac{2xy}{1+x^4y^2}, \frac{x^2}{1+x^4y^2}) + (-xy, 0),$$

där den första termen är ett potentialfält (och integralen kan beräknas med hjälp av en potentialen $U(x,y) = \arctan(x^2y)$) och kurvintegralen över den andra termen lätt kan beräknas direkt.

(b) Vi använde oss av Greens sats. För den fullständiga formuleringen se kursboken, hur vi har använt den beskrevs i (a) i samband med beräkningen.

3. *(a) Formulera Stokes sats med alla förutsättningar.* *T 2 p*

(b) Verifiera Stokes sats för ytan $Y = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - 2z = 0,\ z \leq 2\}$ och fältet *5 p*

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

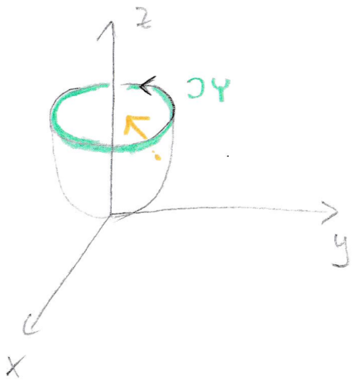
dvs beräkna både flödesintegralen och kurvintegralen och jämför svaret. Redovisa hur du väljer orienteringen!

(a) Se kursboken.

(b) Vi beräknar båda sidor av identiteten

$$\iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial Y} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ytan Y är en paraboloid vars rand ∂D är cirkeln i planet $z = 2$ med medelpunkt i z-axeln och radie 2.



Vi börjar med att beräkna kurvintegralen och parametrisera randen ∂Y

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{för } t \in [0, 2\pi].$$

Därmed får vi

$$\int_{\partial Y} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6\sin t \\ -4\cos t \\ * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \ldots = \underline{-20\pi}.$$

För att beräkna ytintegralen parametriserar vi ytan Y till exempel som

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad \text{för } x^2+y^2 \le 4$$

och får ytans normalvektor

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det återstår att kolla om orienteringen av randen och ytan matchar: Vår parametrisering av randen kräver att ytans normalvektor pekar innåt (dvs uppåt), vilket den beräknade normalvektorn gör, alltså kan vi använda den (utan teckenbyte) i beräkningen av ytintegralen. Vi beräknar först

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+x \\ 0 \\ -z-3 \end{pmatrix}$$

och får därmed

$$\iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2)-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left((\frac{r^4}{4}+r\cos t)r\cos t + \frac{r^2}{2}+3 \right) r dr d\varphi = \ldots = \underline{-20\pi}.$$

4. (a) *Beräkna kurvintegralen* *2 p*

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+9)(z-1)}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade cirkeln $|z-1+2i| = 3$.

(b) *Beräkna kurvintegralen* *2 p*

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

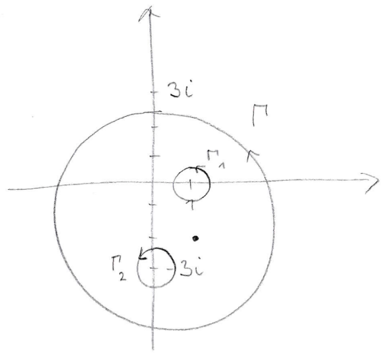
(c) *Beräkna kurvintegralen* *1 p*

$$\int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz,$$

där kurvan γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

(d) *Definiera begreppet analytisk funktion. Formulera Cauchys integralformel och förklara för en av integralerna ovan hur den används där.* *T 2 p*

(a) Vi ser att integranden är analytisk i alla punkte i planet utan $z = 1$ och $z = \pm 3i$. Cirkeln $|z-1+2i| = 3$ omslutar två av dessa punkter, nämligen $z = 1$ samt $z = -3i$. Därmed kan vi ersätta cirkeln med två cirklar Γ_1 och Γ_2, där Γ_1 har medelpunkt $z = 1$ och en liten radie, t.ex. $r = 0,5$ (tillräckligt liten, så att ingen annan singulär punkt ligger innanför cirkeln) och Γ_2 har medelpunkt $z = -3i$ och radie, t.ex., $r = 0,5$.



Vi får

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+9)(z-1)}\,dz &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z-1}\cdot\frac{z^2}{z^2+9}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z+3i}\cdot\frac{z^2}{(z-3i)(z-1)}\,dz \\ &= 2\pi i \frac{z^2}{z^2+9}\Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{z^2}{(z-3i)(z-1)}\Big|_{z=-3i} \\ &= \ldots = \frac{\pi}{10}(-3+11i).\end{aligned}$$

(b) Vi börjar med att skriva om integranden med hjälp av MacLaurinutvecklingen

$$\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{(1+z+\frac{z^2}{2}g(z))-1}{z^2} = \frac{1}{z}+g(z),$$

där g är analytisk i hela $\mathbb{C}$. Därmed får vi

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2}\,dz = \int_\gamma \Big(\frac{1}{z}+g(z)\Big)\,dz = 2\pi i.$$

(c) Integranden är inte en analytisk funktion (inte ens utanför origo), därför beräknar vi integralen direkt med hjälp en parametrisering $\gamma : z(t) = e^{it}$ för $t \in [0, 2\pi]$ och får då med $dz = ie^{it}dt$ att integralen blir

$$\int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{it}|} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{it}dt = \ldots = 0.$$

Kommentar: Alternativt kunde man konstatera att integranden $\frac{1}{|z|} = 1$ längs kurvan och därmed är integralen lika med

$$\int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz = \int_\gamma 1\,dz = 0,$$

ty den konstanta funktionen 1 är analytisk i hela $\mathbb{C}$.

(d) Se kompendiet. Till exempel i (a) beräknas integral över den lilla cirkeln Γ_1 direkt med Cauchys integralformeln, då $f(z) = \frac{z^2}{z^2+9}$.

5. Låt $\mathbf{F}$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. T 2 p

(a) Ange definitionen av ett *potentialfält* samt av att en öppen mängd är *enkelt sammanhängande.*

(b) Ange tillräckliga villkor för att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i Ω. Är dessa villkor även nödvändiga?

(c) Ange ett exempel på en öppen, sammanhängande, men ej enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$.

(a) Fältet $\mathbf{F}$ är ett potentialfält om det finns en $\mathcal{C}^1$ -funktion U sådan att grad $\mathbf{F} = U$ (i fall fältet är $\mathcal{C}^1$, så måste U nödvändigtvis även vara $\mathcal{C}^2$). En öppen mängd är enkelt sammanhängande om den är bågvis sammanhängande samt om varje sluten kurva kan transformeras kontinuerligt till en punkt ("utan att lämna mängden").

(b) Exempel på tillräckliga villkor är

A Kurvintegralen över fältet är oberoende av vägen.

B Kurvintegralen över alla slutna kurvor i Ω är noll.

C Området Ω är enkelt sammanhängande och det gäller rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Egenskapen i A är ekvivalent med att fältet är en potentialfält, dvs även nödvändigt.
Även Egenskapen i B är ekvivalent och därmed nödvändig.
I C däremot är den andra egenskapen (att fältet är rotationsfritt) nödvändigt medan den första egenskapen (att området är enkelt sammanhängande) inte är nödvändigt för att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

6. Låt $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ vara en funktionsserie, låt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ vara en konvergent talserie, och låt följden $(b_k)_{k\geq 1}$ vara begränsad.

Visa: Om $|f_k(t)| \leq c_k$ för alla $t \in I$ och alla $k \geq 1$ så är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot f_k(t)$ likformigt konvergent i I. T 2 p

Vi ämnar använda Weierstrass majorantsats för serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot f_k(t)$. Eftersom följden $(b_k)_{k\geq 1}$ är begränsad, så finns det ett tal $B > 0$ sådan att $|b_k| \leq B$ för alla $k \geq 1$ och vi har

$$|b_k \cdot f_k(t)| \leq B \cdot c_k.$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ är konvergent är även $\sum_{k=1}^{\infty} B \cdot c_k$ konvergent, och därmed implicerar Weierstrass majorantsats att serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot f_k(t)$ är likformigt konvergent.