MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Linjär Algebra
7.5 hp
29 oktober 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. a) Vad menas med att en mängd $\{v_1, \ldots, v_n\}$ av vektorer i ett komplext vektorrum är linjärt oberoende?

   b) Avgör huruvida

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1+i \\ 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   utgör en linjärt oberoende mängd i $\mathbb{C}^4$. Beräkna även $\dim(\mathrm{span}(W))$.

   Lösningsförslag:

   a) Se kursboken avsnitt 1.5 för en definition.

   b) Vi observerar först att

$$(1-i) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Eftersom den tredje av de givna vektorerna är en multipel av den andra är således mängden W linjärt beroende.

   De första två vektorerna inte multiplar av varandra och således är

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} \right\}$$

   linjärt oberoende, och eftersom $\mathrm{span}(W) = \mathrm{span}(W')$ *utgör vektorerna i* W' *en bas för* $\mathrm{span}(W)$.. *Således är* $\dim(\mathrm{span}(W)) = 2$.

2. Betrakta $\mathbb{C}^3$ utrustat med inre produkten $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definierad genom

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3.$$

   (a) Ange en ortonormal bas för $\mathbb{C}^3$ relativt denna inre produkt.

   (b) Bestäm ortogonala komplementet till delrummet $U = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   Lösningsförslag:

   a) Notera att mängden

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

utgör en ortogonal bas för $\mathbb{C}^3$ relativt den givna inre produkten. Vidare har vi

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

medan

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4.$$

En ortonormal bas för den givna inre produkten på $\mathbb{C}^3$ ges alltså av

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Per definition består ortogonala komplementet till U av samtliga vektorer $v \in \mathbb{C}^3$ som uppfyller

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Detta ger villkoret att $v \in U^\perp$ precis när

$$v_1 + 4v_2 = 0.$$

Observera att vi här använder den givna inre produkten och inte den euklidiska inre produkten. Detta underbestämda ekvationssystem har lösningsmängd bestående av vektorer på formen

$$s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{C}.$$

Således har vi

$$U^\perp = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Låt $P_3(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummet av reella polynom av grad högst tre . Betrakta den linjära avbildningen

$$T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p''' + 2x^2p''.$$

Bestäm baser för nollrummet $\mathcal{N}(T)$ och bildrummet $\mathcal{R}(T)$ samt ange avbildningens rang.

Lösningsförslag:

Standardbasen för P_3 är

$$B = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Vi undersöker hur den givna avbildningen verkar på basvektorerna i B. Vi har

$$T(1) = 0, \quad T(x) = 0, \quad T(x^2) = 4x^2$$

samt

$$T(x^3) = 6 + 12x^3.$$

Ställer vi upp koordinaterna för $T(1), \ldots, T(x^3)$ som kolonner i en matris får vi

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Då denna matris är diagonal kan vi genast avläsa att $\operatorname{rang}(T) = 2$. *Vidare utgör $\{1, x\}$ en bas för $N(T)$ medan $\{x^2, 1 + 2x^3\}$ utgör en bas för $R(T)$.*

4. Bestäm samtliga singulära värden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ange en singulärvärdesuppdelning för matrisen A.

Lösningsförslag:

Vi ställer först upp matrisen

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Den symmetriska matrisen till höger har karaktäristiskt polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 1)(\lambda - 9),$$

vilket betyder att matrisens egenvärden är $\lambda_1 = 9$ *samt* $\lambda_2 = 1$*. Detta ger oss de singulära värdena till den ursprungliga matrisen:* $\sigma_1 = 3$ *och* $\sigma_2 = 1$*. Vi bildar sedan*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi bestämmer egenvektorer svarande mot dessa egenvärden på sedvanligt sätt. Efter normering fås

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{och} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och vi kan nu ställa upp matrisen

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Därefter beräknas

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

samt

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nu söker vi en vektor u_3 *som uppfyller* $u_1 \perp u_3$ *och* $u_2 \perp u_3$*, samt* $\|u_3\| = 1$*. Ett sådant val ges av*

$$u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ställer vi därefter upp u_1, u_2, u_3 *som kolonner i matrisen* U *har vi fått singulärvärdesuppdelningen* $A = U\Sigma V^*$*.*

5. Betrakta vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ bestående av reella polynom av grad högst två utrustat med inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)x(1-x)dx.$$

Bestäm en ortonormal bas för $P_2(\mathbb{R}^2)$ relativt denna inre produkt.

Lösningsförslag:

Vi utgår från standardbasen $\{1, x, x^2\}$ *och använder Gram-Schmidts metod för att finna en ortonormal bas. Sätt först* $v_1 = 1$ *och beräkna*

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}.$$

Vi har därmed funnit en första normerad basvektor i $b_1 = \sqrt{6}$.

Vi beräknar i nästa steg

$$v_2 = x - \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = x - 6\int_0^1 x^2(1-x)dx = x - \frac{1}{2}.$$

Normen av v_2 *ges av*

$$\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 x(1-x)dx = \frac{1}{120},$$

vilket ger oss vår andra normerade basvektor

$$b_2 = \sqrt{120}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Slutligen sätter vi

$$v_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle x^2, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

och får efter beräkning av integralerna att

$$v_3 = x^2 - x + \frac{1}{5}.$$

Nu återstår att beräkna normen

$$\|v_3\|^2 = \frac{1}{2100}.$$

En ortonormal bas för P_3 *ges nu av* $\{b_1, b_2, b_3\} = \{\sqrt{6}, \sqrt{120}(x - 1/2), \sqrt{2100}(x^2 - x + 1/5)\}$.

6. Definiera begreppen normal matris och självadjungerad matris. Visa att för en godtycklig komplex matris A, ej nödvändigtvis kvadratisk, så är matrisen A^*A självadjungerad. Visa vidare att egenvärdena till A^*A är icke-negativa.

   Lösningsförslag:

   Se kursbokens kapitel 6 för dessa bevis.

Skrivningsåterlämning äger rum fredagen 8 november kl. 10:30 utanför sal 15, hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.