MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Linjär Algebra
7.5 hp
22 april 2020

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.
Kursliteratur och egna anteckningar är tillåtna hjälpmedel. Det är inte tillåtet att kommunicera med andra om uppgifterna eller att ta hjälp med att lösa dem.

1. Betrakta vektorrummet $M_{2,3}(\mathbb{C})$ av komplexa 2×3-matriser med matrisaddition och multiplikation av matriser med komplexa skalärer. Bestäm den komplexa dimensionen för vektorrummet $M_{2,3}(\mathbb{C})$. Bestäm vidare den komplexa dimensionen för delrummet

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösningsförslag:

Standardbasen för $M_{2,3}$ är innehåller 6 element, och således är dim$(M_{2,3}) = 6$.

Enligt definitionen av W har vi $\dim W \leq 4$. Vi undersöker nu huruvida de givna matriserna är linjärt oberoende. Detta gör vi genom att undersöka lösningsmängden till

$$a \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Det motsvarande ekvationssystemet har endast den triviala lösningen, varför de givna matriserna är linjärt oberoende. Således är $\dim W = 4$.

2. Betrakta den linjära avbildningen

$$T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = p(0) + \int_0^x tp''(t)dt.$$

Bestäm matrisen för denna avbildning relativt basen $B = \{1 + x, -1 + x, 2x^2\}$. Vad har T för rang? Är T en inverterbar avbildning?

Lösningsförslag: *Vi börjar med att undersöka T:s verkan på basvektorerna. Vi har*

$$T(1 + x) = 1 + \int_0^x t \cdot 0dt = 1$$

$$T(-1 + x) = -1 + \int_0^x \cdot 0dt = -1$$

samt

$$T(2x^2) = 0 + \int_0^x t \cdot 4dt = 4 \int_0^x tdt = [2t^2]_0^x = 2x^2.$$

Vi ser vidare att

$$1 = \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{-1}{2}(-1 + x) + 0 \cdot 2x^2$$

samt

$$-1 = \frac{-1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(-1 + x) + 0 \cdot 2x^2$$

medan

$$2x^2 = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1-x) + 1 \cdot 2x^2.$$

Vi kan nu läsa av koordinaterna för $T(1+x)$, $T(1-x)$ och $T(2x^2)$ i basen B och ställa upp den sökta matrisen för T. Vi erhåller

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu att första och andra raden i matrisen $[T]_B^B$ är multiplar av varandra, medan tredje raden inte är en multipel av den första. Således har matrisen rang lika med 2. Eftersom matrisen $[T]_B^B$ alltså inte har full rang är avbildningen T ej inverterbar.

3. Låt V vara ett reellt vektorrum.

(a) Definiera begreppen egenvärde och egenvektor till en linjär avbildning $T\colon V \to V$.

(b) Ge ett exempel på en linjär avbildning på ett vektorrum av dimension minst 2 sådan att T har precis ett egenvärde och precis en egenvektor.

(c) Är $T\colon V \to V$ diagonaliserbar om och endast om T har precis ett egenvärde med 1-dimensionellt egenrum?

(d) Är $T\colon V \to V$ diagonaliserbar om och endast om T har $\dim V$ distinkta egenvärden?

Lösningsförslag:

a) Se kursboken för definitioner.

b) En möjlig sådan avbildning ges av multiplikation av vektorer i $\mathbb{R}^2$ med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Om dimensionen för V är större än 1 är T inte diagonaliserbar under dessa förutsättningar, se b) ovan. Svaret är alltså nej.

d) Identitetsavbildningen har alltid exakt ett egenvärde, nämligen $\lambda = 1$, men är diagonaliserbar. Svaret är alltså nej.

4. Bestäm en singulärvärdesuppdelning till matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösningsförslag: *Låt oss beteckna den givna matrisen med A. Vi har då*

$$A^*A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen längst till höger är symmetrisk och har egenvärdena $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$ och $\lambda_3 = 0$. Detta ger oss två positiva singulära värden, nämligen $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$ och $\sigma_2 = 2$ samt matrisen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser genast att $(0,1,0)^T$ är en normerad egenvektor till A^*A hörande till λ_1. På sedvanligt sätt bestämmer vi sedan en egenvektor hörande till λ_2. En normerad sådan egenvektor ges av $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^T$. Genom att lägga till $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^T$ får vi sedan en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ och därmed matrisen

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Till slut får vi

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

genom att beräkna $u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$.

Vi får slutligen uppdelningen

$$A = U \Sigma V^*.$$

5. Betrakta vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ bestående av reella polynom av grad högst två utrustat med inre produkten

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Ange en ortonormal bas för $P_2(\mathbb{R})$ relativt denna inre produkt.

Lösningsförslag:

Vi använder Gram-Schmidts metod för att konstruera en ON-bas utgående från standardbasen $\{1, x, x^2\}$.

Vi sätter $w_1 = 1$ *och noterar att* $\|w\|^2 = 1 \cdot 1 + \int_0^1 1 \cdot 1dx = 1 + \int_0^1 dx = 2$. *Därmed är* $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *en enhetsvektor.*

Vi sätter sedan $w_2 = x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Vi har*

$$\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Således fås $w_2 = x - \frac{1}{4}$. *Vi har*

$$\|w_2\|^2 = 1/16 + \int_0^1 (x - 1/4)^2 \, dx = \frac{1}{16} + \frac{7}{48} = \frac{5}{24}.$$

En andra ortonormal basvektor ges nu av

$$v_2 = \sqrt{\frac{24}{5}} \left(x - \frac{1}{4} \right).$$

Slutligen låter vi

$$w_3 = x^2 - \langle x^2, 1/\sqrt{2} \rangle 1/\sqrt{2} + \langle x^2 \sqrt{\frac{24}{5}} \left(x - \frac{1}{4} \right) \rangle \sqrt{\frac{24}{5}} \left(x - \frac{1}{4} \right).$$

Vi behöver de inre produkterna

$$\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = 0 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

och

$$\langle x^2, \sqrt{\frac{24}{5}} \left(x - \frac{1}{4} \right) \rangle = 0 + \int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{24}{5}} \left(x - \frac{1}{4} \right) dx = \sqrt{\frac{24}{5}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}.$$

Vi får från detta

$$w_3 = x^2 - \frac{1}{6} - \sqrt{\frac{24}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}} \left(x - \frac{1}{4} \right) = x^2 - \frac{4}{5} x + \frac{1}{30}.$$

Slutligen beräknar vi

$$\|w_3\|^2 = \frac{1}{900} + \int_0^1 (x^2 - \frac{4}{5} x + \frac{1}{30})^2 dx = \frac{1}{900} + \frac{1}{100} = \frac{1}{90}$$

och vi får

$$v_3 = \sqrt{90}(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{30}).$$

6. Bestäm största och minsta värdet för

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2$$

på mängden $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Gäller $Q(x, y, z) > 1$ för $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Lösningsförslag: *Vi observerar först att Q är en kvadratisk form, som kan beskrivas genom*

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matrisen A ovan är symmetrisk och är således ortogonalt diagonaliserbar. Under en ortogonal avbildning skickas mängden av punkter som uppfyller $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ på sig själv, varför det räcker att hitta största och minsta egenvärdet till A för att bestämma Qs största och minsta värde.

Det karaktäristiska polynomet till A är

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 15.$$

Vi gissar först roten $\lambda_1 = 3$. Därefter tillämpar vi polynomdivision och kvadratkomplettering för att erhålla rötterna $\lambda_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Notera nu att

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) \geq \frac{1}{2}(5 - 3) = 1,$$

vilket betyder att Q:s minsta värde på den givna mängden är större än 1. Vi har vidare att $\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) \geq \frac{1}{2}(5 + 2) = \frac{7}{2} > 3$, så att λ_2 ger funktionens största värde på $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.