MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Linjär Algebra
7.5 hp
20 augusti 2020

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.
Kursliteratur och egna anteckningar är tillåtna hjälpmedel. Det är inte tillåtet att kommunicera med andra om uppgifterna eller att ta hjälp med att lösa dem.

1. Betrakta det reella vektorrummet $M_{2,2}(\mathbb{R})$ bestående av två gånger två -matriser med reella element. Avgör huruvida mängden
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
utgör en bas för $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Beräkna vidare $\dim[\text{span}(S)]$.

2. Betrakta den linjära avbildningen
$$T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = p'(0) + \frac{1}{2}\int_0^x p''(t)dt.$$
Bestäm matrisen för denna avbildning relativt basen $B = \{1+x, 1-x, x^2\}$. Vad har T för rang? Är T en inverterbar avbildning?

3. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$
Är matrisen diagonaliserbar?

4. Betrakta $\mathbb{R}^3$ utrustat med den vanliga euklidiska inre produkten. Bestäm en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ där minst en av vektorerna
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
ingår. Kan en ortonormal bas innehålla båda vektorerna?

5. Bestäm en singulärvärdesuppdelning till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Låt V_1 och V_2 vara två reella vektorrum. Vad menas med att V_1 och V_2 är isomorfa?
(b) Låt $M_{2,2}(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummet av två gånger två -matriser med reella element och låt $P_n(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummet av polynom med reella koefficienter och grad högst n. Bestäm ett värde på det naturliga talet n för vilket $M_{2,2}(\mathbb{R})$ och $P_n(\mathbb{R})$ är isomorfa. Ange även en linjär avbildning som realiserar denna isomorfi.