MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Linjär Algebra
7.5 hp
20 augusti 2020

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.
Kursliteratur och egna anteckningar är tillåtna hjälpmedel. Det är inte tillåtet att kommunicera med andra om uppgifterna eller att ta hjälp med att lösa dem.

1. Betrakta det reella vektorrummet $M_{2,2}(\mathbb{R})$ bestående av två gånger tvåmatriser med reella element. Avgör huruvida mängden

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

utgör en bas för $M_{2,2}(\mathbb{R})$ och ange, om det behövs, matriser som tillsammans med S bildar en bas.

Lösningsförslag: *Vi observerar först att*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

samt att

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Två av matriserna i S är kan alltså skrivas som linjärkombinationer av två andra element i S. Således utgör S ej en bas för $M_{2,2}$.

Besiktning ger genast vid handen att

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{och} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. För att erhålla en bas för $M_{2,2}$ kan vi alltså lägga till två linjärt oberoende matriser. Ett möjligt val är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{och} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Betrakta den linjära avbildningen

$$T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad T(p) = p'(0) + \frac{1}{2}\int_0^x p''(t)dt.$$

Bestäm matrisen för denna avbildning relativt basen $B = \{1+x, 1-x, x^2\}$. Vad har T för rang? Är T en inverterbar avbildning?

Lösningsförslag:

Observera att $T(1) = 0$ vilket betyder att T har icketrivialt nollrum och där med ej är inverterbar.

Vi har

$$T(1-x) = 1 = \frac{1}{2}(1 + x + 1 - x)$$

$$T(1+x) = -1 = -\frac{1}{2}(1+x+1-x)$$
$$T(x^2) = x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$$

och får nu, genom att ställa upp koordinaterna relativt B som kolonner, matrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De första två raderna i matrisen är inte multiplar av varandra vilket betyder att matrisen, och därmed avbildningen T, har rang lika med 2.

3. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Är matrisen diagonaliserbar?

Lösningsförslag:

Eftersom den givna matrisen är övertriangulär kan vi genast läsa av egenvärdena från diagonalen: vi får alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ med multiplicitet två samt λ_2 med multiplicitet 1.

Vi undersöker egenrummet hörande till egenvärdet λ_1. Vi betecknar den givna matrisen med A och noterar att koefficientmatrisen i systemet $(A - \mathbb{I})x = 0$ är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Vi kan läsa av att denna koefficientmatris har rang 2, vilket betyder att dess nollrum har dimension 1 enligt dimensionssatsen. Således är egenrummet $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{(1,0,0)^T\}$ endimensionellt, vilket betyder att A ëj är diagonaliserbar.

För att bestämma egenvektorer hörande till egenvärdet λ_2 undersöker vi $(A - 17\mathbb{I})x = 0$, vilket ger oss koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} -16 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och därmed fås att $E_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{(0,0,1)^T\}$.

4. Betrakta $\mathbb{R}^3$ utrustat med den vanliga euklidiska inre produkten. Bestäm en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ där minst en av vektorerna

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ingår. Kan en ortonormal bas innehålla båda vektorerna?

Lösningsförslag:

Om B är en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ kan B inte innehålla bågge vektorerna, då dessa har inre produkten $1/2$ och således ej är ortogonala.

Båda vektorerna är dock enhetsvektorer, så en ON-bas fås genom att lägga till två ortogonala enhetsvektorer. Ett möjligt val av bas är

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Bestäm en singulärvärdesuppdelning till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningsförslag:

Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och matrisen till höger har karaktäristiska polynomet $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda)$. *De nollskilda egenvärdena är alltså* $\lambda_1 = 9$ *och* $\lambda_2 = 1$ *vilket ger de singulära värdena* $\sigma_1 = 3$ *och* $\sigma_2 = 1$ *och matrisen*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

på sedvanligt sätt och får de normerade egenvektorerna $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, $v_3 = (0, 0, 1)$. *Till slut fås*

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \quad \text{och} \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T.$$

Dessa vektorer tar vi nu som kolonner i matriserna U *och* V.

6. (a) Låt V_1 och V_2 vara två reella vektorrum. Vad menas med att V_1 och V_2 är isomorfa?
(b) Låt $M_{2,2}(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummet av två gånger två -matriser med reella element och låt $P_n(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummet av polynom med reella koefficienter och grad högst n. Bestäm ett värde på det naturliga talet n för vilket $M_{2,2}(\mathbb{R})$ och $P_n(\mathbb{R})$ är isomorfa. Ange även en linjär avbildning som realiserar denna isomorfi.

Lösningsförslag:

Se kursboken för begreppet isomorfi. Både $M_{2,2}(\mathbb{R})$ *och* $P_3(\mathbb{R})$ *har dimension* 4 *och är således isomorfa. En konkret isomorfi är den linjära utvidgningen av avbildningen*

$$T\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \quad E_{j+1} \mapsto x^j, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

där $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.