Lösningsförslag till Matematik II–Linjär algebra den 26 oktober 2020

1. Låt W vara det delrum av $P_4 = \{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 : p_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3,4\}$ som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = 1+2x+x^2+3x^4, v_2 = -1-2x^2+x^3-2x^4, v_3 = 2+x-4x^2+3x^4, v_4 = -1+x+x^3-x^4.$$

Bestäm dimensionen för W. Ange en bas för W.

Lösningsförslag: Vi undersöker först huruvida de givna polynomen är linjärt oberoende. Detta gör vi genom att undersöka skvationen

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0.$$

Eftersom $1, x, x^2, x^3, x^4$ är linjär oberoende får vi det linjära ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Genom Gauss elimination får vi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Alltså finns det en nollskild lösning för α_i, $i = 1,2,3,4$. Då är v_1, v_2, v_3, v_4 linjärt beroende. Från matrisen ovan inser vi att första tre kolonnerna är linjärt oberoende, vilket innebär att v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende och utgör en bas för W och dimension av W är 3.

2. Låt $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ vara ett hyperplan i $\mathbb{R}^4$ och låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges av spegling i H. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för T. Är T diagonaliserbar?

Lösningsförslag:

Eftersom T än en spegling i H och H är otorgonal mot $v = (1,1,1,1)^t$ då $T(v) = -v$. Alltså är -1 ett egenvärde och $v = (1,1,1,1)^t$ det hörande egenvektor. Vidare vet vi att $T(u) = u$ för alla $u \in H$. Per definition är 1 ett egenvärde. Löser vi ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ får vi

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma \quad \text{för alla } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Då får vi tre linjär oberoende egenvektorer hörande egenvärdet 1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den linjära avbildningen T är diagonaliserbar enligt testet för diagonalisering.

3. Låt T vara en linjär avbildning på $M_{2\times 2}$ som definieras genom $T(X) = A^*X + XA$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ange matrisen för T i standardbasen för $M_{2\times 2}$. Bestäm $\mathcal{N}(T)$. Är matrisekvationen $T(X) = Q$ entydigt lösbar för alla $Q \in M_{2\times 2}$?

Lösningsförslag: Vi räknar först bilderna till basvektorerna $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$:

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21};$$
$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} + 2E_{12} + E_{22};$$
$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + 2E_{21} + E_{22};$$
$$T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -E_{12} - E_{21} + 4E_{22}.$$

Matrisen för T i $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ A är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nästa bestämmer vi $\mathcal{N}(T)$ genom att räkna determinanten av A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

vilket innebär att $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. det innebär att T är injektiv så $T(X) = Q$ har en entydig lösning.

4. Ange en singulärvärdesuppdelning för matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Skriv vidare A på formen $A = QS$ där Q är en ortogonal matris och S är en symmetrisk matris med positiva egenvärden. Visa att alla inverterbara reella matriser A kan entydigt skrivas på denna form. Ge en geometrisk tolkning av denna matrisuppdelning.

   Lösningsförslag: Egenvärdena till $A^*A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$ är $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = 5$. Så singulärvärden är $\sigma_1 = 3\sqrt{5}$, $\sigma_2 = \sqrt{5}$. Då $\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Ortonormerade genvektorer hörande $\lambda_1 = 45$ och $\lambda_2 = 5$ är $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ respektive $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$, vilket ger $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sätt $u_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}Av_1$ och $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}Av_2$ får vi $U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Så singulärvärdesuppdelning för A är

$$A = U\Sigma V^t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

   Vidare $A = U\Sigma V^t = (\underbrace{UV^t}_{Q})(\underbrace{V\Sigma V^t}_{S})$ där $Q = UV^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ är en ortogonal matris och $S = V\Sigma V^t = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ som är symmetrisk och har egenvärde som $3\sqrt{5} > 0$ och $\sqrt{5} > 0$.

   Beviset för allmänna inverterbara matriser fås på samma sätt. Se kursboken för detaljer. Denna uppdelning separerar rotationer som enbart ligger i Q från skalning i S vars egenvärden är skalningsfaktorer (t ex principala axlar av ellipsoider).

5. Bestäm den adjungerade operatorn till T på $\mathbb{C}^3$ relativt standardinreprodukten genom

$$T((z_1, z_2, z_3)) = (2z_2 + iz_3, iz_1, z_2).$$

   Är T normal? Är T självadjungerad?

Lösningsförslag: Vi får fram T^* genom matrisen i standardbasen B. Då

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies [T^*]_B = A^* = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$T^*((z_1, z_2, z_3)) = (-iz_2, 2z_1 + z_3, -iz_1)$.

Avbildningen T är varken självadjungerad eller normal eftersom $A \neq A^*$ och elementet på $(1,1)$ i matrisen A^*A är 1 och i AA^* är 5.

6. Antag att V är ett vektorrum över F. Vad menas med en inre produkt på V? Visa att

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 + x_3y_3$$

är en inre produkt på $\mathbb{R}^3$. Beräkna det största och minsta värdet av

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2$$

då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Lösningsförslag: Se definition i boken. Låt $x = (x_1, x_2, x_3)^t$, $y = (y_1, y_2, y_3)^t$.

(i) Visa att $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ för alla x, y. Notera att

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 + x_3y_3 = (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \text{ och } A^t = A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^tAy$$

och $x^tAy = (x^tAy)^t = y^tA^tx = y^tAx \iff \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ för alla x, y.

(ii) Axiomet $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ för alla x, y och alla $\alpha \in \mathbb{R}$ följer av att $\alpha \langle x, y \rangle = (\alpha x)^tAy = \alpha x^tAy = \langle x, y \rangle$.

(iii) Vi ska nu visa att $\langle x, x \rangle \geq 0$ för alla x och $\langle x, x \rangle = 0$ endast om $x = 0$. Notera att $q(x) = \langle x, x \rangle = x^tAx$ är en kvadratisk form. Det kan ortogonalt diagonaliseras dvs det finns en ortogonal matris Q så att

$$q(x) = x^tAx = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2$$

där $x = Qy$ och $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8} > \lambda_2 = 3 > \lambda_3 = 3 - \sqrt{8} > 0$ är egenvärden till A. Så $q(x) \geq 0$ för alla x. Antag nu $q(x) = 0$. Då är summan av icke-negativa tal=0. Det innebär att $\lambda_1y_1^2 = \lambda_2y_2^2 = \lambda_3y_3^2 = 0 \implies y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = 0. \implies y = 0 \implies x = 0$.

Då är funktionen $\langle\ ,\ \rangle$ en inre produkt.

Till sist $\max_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ och $\min_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_1 = 3 - \sqrt{8}$.