Anmälningskod: **MM5012_HT20**
Assignment Tentamen_210323 due 03/23/2021 at 06:00pm CET

Webwork används endast för att dela ut individualatentamens uppgifter.

Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Observera att deluppgifter kan användas.

Lämna in din lösning på kurssidan enligt instruktionen.

OBS! Skriv ned uppgifterna eller bifoga problembladet från webwork med din anmälningskod ovan.

För tentamensåterlämning besök https://survey.su.se/Survey/37054/sv

---

1. **(5 points)**

(i) Låt $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vara mängden av $n\times n$-matriser av reella tal. Visa att $M_0 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ är ett vektorrum.

(ii) Är $W = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 1\}$ ett delrum till $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

---

2. **(5 points)**

Definiera avbildningen T på $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ genom $T(X) = A^tXA + X$ där $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Visa att T är en linjär avbildning.

(ii) Bestäm matrisen för T i den ordnade basen $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, där E_{ij} element är 1 om $i = j$ annars 0, $(i, j = 1, 2)$.

(iii) Bestäm nollrummet till T samt bildrummet till T.

---

3. **(5 points)**

Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Beräkna det karakteristiska polynomet till matrisen A.

(ii) Är det möjligt att hitta en radvektor $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ sådan att $A + bk$ har egenvärden $-2, 2, 1+2i, 1-2i$? Är lösningen entydig om svaret är ja?

---

4. **(5 points)**

För alla $x, y \in \mathbb{R}^4$ definieras $\langle x, y\rangle_Q = y^tQx$ med matrisen $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Visa att $\langle x, y\rangle_Q = y^tQx$ är en inre produkt på $\mathbb{R}^4$.

(ii) Bestäm $W^\perp$ relativt denna inre produkt där $W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

---

5. **(5 points)**

Bestäm $T^*(f)$, då $f(t) = 4 - 4t$ där T^* är den adjungerade operatorn till T på $P_1(\mathbb{R})$ genom $T(g) = g' + 3g$ relativt inre produkten

$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

---

6. **(5 points)**

(i) Ange två tolkningar av multiplikationen Ax där A är en reell $m \times n$-matris och x är en reell kolonnvektor med n komponenter.

(ii) Skriv matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 16 \\ 3 & -3 & 12 \\ 4 & -4 & 16 \end{pmatrix}$ på formen $A = BC$ med egenskapen att B har full kolonnrang och C har full radrang.

(iii) Vi säger att en $m \times n$-matris M har en rang-1 uppdelning om det finns en kolonnvektor u med m komponenter och en kolonnvektor v med n komponenter sådana att $M = uv^*$. Argumentera att matrismultiplikation AB = summa av rang-1 matrisuppdelningar där A och B har lämpliga dimensioner. Lösning för små matriser eller speciella matriser ger delpoäng.