Lösningsförslag till Matematik II–Linjär algebra den 22/03 2021

Observera att alla har liknande uppgifter men inte identiska.

1. (i) Det räcker att visa att mängden M_0 ett delrum, dvs den är sluten under addition och multiplikation med skalär. Tag godtyckliga två vektorer $A, B \in M_0$ och ett godtyckligt reellt tal α. Då gäller att

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in M_0$$

och

$$\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A) = \alpha \cdot 0 = 0 \Longrightarrow \alpha A \in M_0$$

enligt räknereglerna för matriser och definitionen av spår. Notera att kontroll av att nollvektorn ligger i M_0 följer av $\alpha = 0$. Det visar att M_0 är ett delrum till $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ så är M_0 ett vektorrum.

(ii) Delmängden W är inte ett delrum eftersom spår av nollvektorn har spår $0 \neq 1$.

2. (i) Att T är en linjär avbildning följer av

$$T(\alpha X + \beta Y) = A^t(\alpha X + \beta Y)A + (\alpha X + \beta Y) = A^t(\alpha X)A + A^t(\beta Y)A + \alpha X + \beta Y$$

$$= \alpha(A^t X A + X) + \beta(A^t Y A + Y) = \alpha T(X) + \beta T(Y),\ \forall X, Y \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(ii) Matrisen för T är

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

som fås genom beräkning av basbilderna

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}, T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(iii) Matrisen $[T]_E$ är en triangulär matris med nollskilda diagonalelementen så är den inverterbar. Det medför att nollrummet är $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ och bildrummet har dimension 4 enligt dimensionssatsen. Således är $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bildrummet.

3. Notera att matrisen A och matrisen $A + bk$ har samma struktur. Så det räcker att beräkna det karakteristiska polynomet till matrisen på formen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

Så vi får $\chi_B(s) = \det(sI - B) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, vilket ger

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^4 + 3s^3 - 2s^2 - 2s + 4,$$

$$\chi_{A+bk}(s) = \det(sI - (A + bk)) = s^4 + (3 - k_3)s^3 - (2 + k_2)s^2 - (2 + k_1)s + (4 - k_0).$$

Det är möjligt att hitta entydig lösning till k så att $A + bk$ har de givna egenvärden. Det görs genom att jämföra koefficienterna mellan polynomen $\chi_{A+bk}(s)$ och

$$p_d(s) = (s-2)(s+2)(s-(1+2i))(s-(1-2i)) = s^4 - 2s^3 + s^2 + 8s - 20$$

dvs $3 - k_3 = -1$, $-(2 + k_2) = 0$, $-(2 + k_1) = 8$, $4 - k_0 = -20$. Alltså $k = (24, -10, -3, 5)$.

4. (i) För $x, y, z \in \mathbb{R}^4$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ får vi följande genom räknereglerna för matriser

   - $\langle \alpha x, y \rangle_Q = \alpha \langle x, y \rangle_Q$
   - $\langle x + y, z \rangle_Q = \langle x, z \rangle_Q + \langle y, z \rangle_Q$
   - $\langle x, y \rangle_Q = \langle xy, z \rangle_Q$

   Observera att Q är en 2×2-block diagonalmatris. Det är lätt att inse att Q har positiva egenvärden (eller Q är positivt definit). Det är självklart att $\langle x, x \rangle_Q \geq 0$ för alla x. Nu bevisar vi att $\langle x, x \rangle_Q = 0$ endast om $x = 0$. Det görs genom diagonalisering av den kvadratiska former. Vi får

   $$\langle x, x \rangle_Q = y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^3 + 3y_4^2$$

   där $x = Ty$ med ortogonal matrisen T.

   $$\langle x, x \rangle_Q = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^3 + 3y_4^2 \Leftrightarrow y_i^2 = 0 \Leftrightarrow y_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$$

   vilket ger $x = 0$.

   (ii) Kalla vektorerna som spänner upp W w_1, w_2. Så $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 : \langle w_i, v \rangle_Q = 0, i = 1, 2\}$. Villkoren $\langle w_i, v \rangle_Q = 0, i = 1, 2$ är ett ekvations system $v_1 + 2v_2 = 0$, $2v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$ vars lösning är $v = (-2s, s, \frac{9}{4}s, t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

   $$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ \frac{9}{4}s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Se Räkneövning 11 - 2021-02-23 (av Erik Lindell) på `https://kurser.math.su.se/enrol/index.php?id=996`.

6. (i) Två av dem med avseende på beräkning är (a) Ax är linjär kombination av kolonnvektorer i matrisen A och (b) elementen i Ax är inre produkter av rad vektorer och x.

   (ii) Notera att andra kolonn är första kolonn multiplicerad med -1 och den tredje kolonnen är först kolonn multiplicerad med 4. Alltså är $B = (4, 3, 4)^t$ och $C = (1, -1, 4)$.

   (iii) Beteckna A kolonnvis respektive B radvis. $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \text{——} & b_1^t & \text{——} \\ \text{——} & b_2^t & \text{——} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \text{——} & b_n^t & \text{——} \end{pmatrix}$.

   Då är

   $$AB = a_1 b_1^t + a_2 b_2^t \cdots + a_n b_n^t.$$

   Vi kan visa att den är lika med M med elementen $m_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ak} b_k j$. (Gör det!)