Lösningar till tentamen

Matematisk för Naturvetenskaper I, 190605.

1.a) Både täljare och nämnare blir noll då $x = 1$, vilket enligt faktorsatsen ger att båda är delbara med $x - 1$. En enkel räkning ger att $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ och $x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$. Vi får därför att

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{3}{4}.$$

b) MacLaurin-utveckling av $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B_1(x)x^5$ och $e^t = 1 + t + B_2(t)t^2 \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + B_3(x)x^4$ (där B_1, B_2, B_3 är begränsade funktioner) ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)(e^{x^2} - 1)}{x^5} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{6}x^3 - B_1(x)x^5)(x^2 + B_3(x)x^4)}{x^5} =$$

$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{6} - B_1(x)x^2)(1 + B_3(x)x^2) = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

2. Systemet

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & -7x_4 & -7x_5 = & -1, \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +5x_5 = & 2, \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -x_4 & +3x_5 = & 3, \end{cases}$$

kan på utvidgad matrisform skrivas som

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & -7 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

(Byt plats på rad 1 och 2. Drag sedan två gånger den nya rad 1 från rad två och fyra gånger den nya rad 1 från rad 3.)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -13 & -17 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & -13 & -17 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{13}{5} & \frac{17}{5} & 1 \end{array}\right).$$

Vi sätter $x_3 = 5s, x_4 = 5t, x_5 = 5u$ vilket ger $x_2 = 2s - 13t - 17u + 1$ och $x_1 = s + 11t + 9u$. (Det går naturligtvis också bra att sätta $x_3 = s, x_4 = t, x_5 = u$, men då kommer svaret att innehålla bråk.)

3. Vi beräknar först derivatan:

$$f'(x) = D\left(\frac{1}{2}x - \sin x\right) = \frac{1}{2} - \cos x.$$

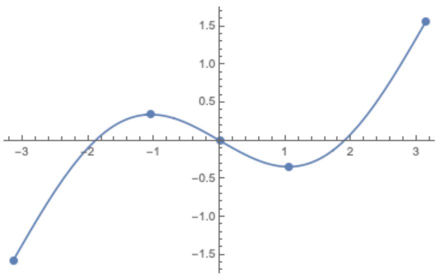
Nollställen till f' är alltså lösningar till ekvationen $\cos = \frac{1}{2}$, vilket i det givna intervallet ger $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Vi får följande teckentabell:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Vi noterar att $x = -\frac{\pi}{3}$ ger ett lokalt maximum med max-värde $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ och att, på motsvarande sätt, $x = \frac{\pi}{3}$ ger ett lokalt minimum med min-värde $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$. Men ingen av dessa lokala extrempunkter kan konkurrera med ändpunkterna: funktionen antar sitt globala max-värde $\pi/2$ i den högra ändpunkten π och sitt globala min-värde $-\pi/2$ i den vänstra ändpunkten $-\pi$. När det gäller konvexiteten noterar vi att $f''(x) = \sin x$ med det enda nollstället $x = 0$ i intervallet. Vi får alltså följande mycket enkla teckentabell:

x	$-\pi$		0		π
f''		$-$	0	$+$	
f''		$\frown$	0	$\smile$	

Funktionen är alltså konkav på $[-\pi, 0]$, konvex på $[0, \pi]$ samt har en inflexionspunkt i $(0, 0)$.



4. Vi får enligt definitionerna

$$f_1 = \overline{EF} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{1}{4}e_1 + \frac{2}{3}e_2$$

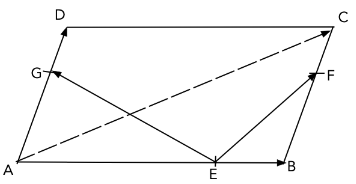
och

$$f_2 = \overline{EG} = \frac{1}{4}\overline{AG} - \overline{AE} = -\frac{3}{4}e_1 + \frac{2}{3}e_2.$$

Ur dessa två samband kan vi lösa ut e_1 och e_2 vilket ger

$$\begin{cases} e_1 = & f_1 & - & f_2, \\ e_2 = & \frac{9}{8}f_1 & + & \frac{3}{8}f_2. \end{cases}$$

Till sist får vi $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = e_1 + e_2 = (f_1 - f_2) + (\frac{9}{8}f_1 + \frac{3}{8}f_2) = \frac{17}{8}f_1 - \frac{5}{8}f_2$.



5. Vi beräknar först de partiella derivatorna:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x(1 + x + y))e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (1 - y(1 + x + y))e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

$yf'_x - xf'_y = 0 \Rightarrow (y - x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0$ dvs $x = y$. Insättning av $x = y$ i $f'_x = 0$ ger $1 - x - 2x^2 = 0$, vilket ger rötterna $x = \frac{1}{2}$ och -1, och därmed de kritiska punkterna $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och $(-1. -1)$. Vi får funktionsvärdet $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2e^{-1/4}$, som alltså är en möjlig kandidat. $(-1. -1)$ ligger på randen och behöver därför egentligen inte tas med i detta steg.

På randen antar f samma värden som $h(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = (1 + \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t)e^{-1} = (1 + 2\sin(t + \frac{\pi}{4}))e^{-1}$ som uppenbarligen varierar mellan $3e^{-1}$ och $-e^{-1}$ eftersom $-1 \leq \sin(t + \frac{\pi}{4}) \leq 1$.

Det återstår att jämföra talen $2e^{-1/4}$, $3e^{-1}$ och $-e^{-1}$. Bara $-e^{-1}$ är negativt, så det måste vara globalt minimum. Men vilket är störst av $2e^{-1/4}$ och $3e^{-1}$? Om vi sätter $d = 2e^{-1/4}/3e^{-1} = \frac{2}{3}e^{3/4}$ så ser vi att

$$d^4 = \frac{16}{81}e^3 > \frac{16}{81} \cdot 2^3 = \frac{128}{81} > 1.$$

Det följer att $d > 1$ och alltså att $2e^{-1/4} > 3e^{-1}$. Vi drar slutsatsen att det globala maxvärdet är $2e^{-1/4}$.

6.a) Differentialkvationen $y' + 2xy = e^{-x^2}$ är linjär med integrerande faktor I.F. $= e^{x^2}$, vilket ger

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 1$$

$$\Leftrightarrow D\left(e^{x^2}y\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2}y = x + C \Leftrightarrow y = (x + C)e^{-x^2}.$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger nu att

$$1 = y(0) = 0 + C \Leftrightarrow C = 1,$$

dvs

$$y(x) = (x + 1)e^{-x^2}.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 2 = 0$, med de komplexa rötterna $r_{\pm}1 = -1 \pm i$, vilket ger den homogena lösningen

$$y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x).$$

Vi söker nu en partikulärlösning till ekvationen $y'' + 2y' + 2y = xe^x$ genom att göra variabelbytet $y = ze^x$. Derivation ger $y' = (z' + z)e^x$ och $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Insatt i ekvationen får vi

$$(z'' + 2z' + z)e^x + 2(z' + z)e^x + 2ze^x = xe^x$$

$$\Leftrightarrow (z'' + 2z' + z) + 2(z' + z) + 2z = x$$

$$\Leftrightarrow z'' + 4z' + 5z = x.$$

Denna ekvation kan lösas genom ansatsen $z = ax + b$. Derivation ger $z' = a$ och $z'' = 0$. Insatt i ekvationen får vi

$$4a + 5(ax + b) = x.$$

Genom att jämföra koefficienter ser vi nu att $5a = 1$ och $4a + 5b = 0$, vilket ger $a = 1/5, b = -4/25$ och vi får därmed partikulärlösningen $z = \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$.

Återgång till den ursprungliga variabeln y ger alltså partikulärlösningen

$$y_p = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^x$$

och slutligen den allmänna lösningen $y = y_h + y_p =$

$$e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^x.$$

/Martin Tamm/190605