Lösningar till tentamen

Matematisk för Naturvetenskaper I, 190815.

1.a) Nämnaren blir noll då $x = 1$, vilket enligt faktorsatsen ger att den är delbar med $x-1$. En enkel räkning ger att $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Om vi dessutom förlänger med $\sqrt{x}+1$ (konjugatuttrycket till täljaren) får vi därför att

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)} \to \frac{1}{(1+1+1)(1+1)} = \frac{1}{6}.$$

b) Vi börjar med att sätta upp uttrycket på en gemensam nämnare:

$$\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}.$$

MacLaurin-utveckling ger $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B(x)x^5$, och därmed

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 - B(x)x^5}{x^2\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6} - B(x)x^2}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\frac{1}{6} - 0}{1} = \frac{1}{6}$$

enligt kvotregeln, eftersom $B(x)$ är en begränsad funktion.

2. Matrisinversen till A beräknas med radoperationer eller med formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi observerar också att $AXA^{-1} = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BA$ vilket ger

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & 55 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}.$$

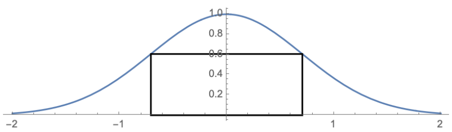
3. Det räcker att betrakta rektanglar med hörn i punkterna $(-x, 0)$, $(x, 0)$, (x, e^{-x^2}) och $(-x, e^{-x^2})$, där $x \geq 0$ (se figur). En sådan rektangel har arean

$$B(x) = B \cdot h = 2xe^{-x^2}.$$

Vi får derivatan $B'(x) = (2-4x^2)e^{-x^2}$, som har det unika nollstället $x = 1/\sqrt{2}$ i intervallet $[0, \infty[$, vilket ger tecken-tabellen

x	0		$1/\sqrt{2}$		∞
B'		$+$	0	$-$	
B	0	$\nearrow$	$\sqrt{2/e}$	$\searrow$	0

Ur denna teckentabell följer direkt att $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ger ett globalt maximum med maxvärdet $\sqrt{\frac{2}{e}}$.



4. Vi skriver ekvationssystemet på matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & 3 & a & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & a-3 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a \end{array}\right)$$

Om $a \neq 2, 3$ så bestämmer den andra och den tredje ekvationen y och z entydigt, och därefter ges x av den första ekvationen, vilket ger en entydig lösning. Om $a = 2$ så är den tredje ekvationen trivialt uppfylld för alla z. Den andra ger $y = 0$ och den första ger x vilket ger oändligt många lösningar. Om $a = 3$ så är den andra ekvationen uppenbarligen olöslig.

Sammanfattningsvis får vi en lösning för $a \neq 2, 3$, ingen för $a = 3$ och oändligt många för $a = 2$.

Det går naturligtvis även bra att beräkna determinanten till ekvationssystemet som blir $(a-3)(a-2)$, och sedan analysera specialfallen på vanligt sätt.

5. Volymen vid rotation runt x-axeln fås direkt ur formeln för rotationsvolym:

$$V_x = \pi\int_0^1 (y(x))^2\,dx =$$

$$\pi\int_0^1 x(1-x)\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

6.a) Differentialkvationen $x^2y' = y\sqrt{y}$ är separabel och kan skrivas som

$$x^2y' = y\sqrt{y} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y^{3/2}} = \int\frac{dx}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow -2y^{-1/2} = -x^{-1} + C.$$

Bivillkoret $y(1) = 1$ ger nu att $-2 = -1 + C$, dvs $C = -1$. Vi får slutligen

$$-2y^{-1/2} = -x^{-1} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{4x^2}{(x+1)^2}.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 4r + 4 = 0$, med den reella dubbelroten $r = 2$, vilket ger den homogena lösningen

$$y_h = (Cx + D)e^{2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 4$ genom att göra ansatsen $y_p = ax^2 + bx + c$. Vi får $y_p' = 2ax + b$ och $y_p'' = 2a$, vilket efter insättning i ekvationen ger

$$2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4,$$

vilket vid identifikation av koefficienterna ger $4a = 2$, $-8a + 4b = 0$ och $2a - 4b + 4c = -4$. Vi får den entydiga lösningen $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = -\frac{1}{4}$ och därmed partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}.$$

Den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen blir därmed

$$y = y_h + y_p = (Cx + D)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}.$$

/Martin Tamm/190815