

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. Beräkna följande gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - \sin x)}{e^{x^5} - 1}.$$

4 p

2. Bestäm för alla värden på parametern  $a$ , antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} ax + y & = 1 \\ x + ay & = 1 \\ & az + 2w = 1 \\ & 2z + aw = 2 \end{cases}$$

5 p

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$$

på intervallet  $[-\frac{3}{2}, 3]$ . Undersök speciellt stationära punkter, extremvärden och konvexitets-egenskaper.

6 p

4. Låt  $A, B, C$  och  $D$  utgöra hörnen i en fyrhörning i planet. Vektorerna  $e_1 = \overline{AB}$  och  $e_2 = \overline{AC}$  utgör en bas för planet och vektorerna  $f_1 = \overline{AD}$  och  $f_2 = \overline{BC}$  utgör en annan. Antag att fyrhörningen är sådan att  $\overline{AD} = -\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AC}$ . Uttryck vektorerna  $e_1$  och  $e_2$  i vektorerna  $f_1$  och  $f_2$ . Ange även koordinaterna i basen  $f_1, f_2$  för den vektor som i basen  $e_1, e_2$  har koordinaterna  $(3, 2)$ .

5 p

5. Bestäm största och minsta värde till funktionen  $f(x, y) = \sin x + \sin y$  i området  $D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq \pi\}$ .

5 p

6. a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'(1+x^2) = 1+y$$

som uppfyller bivillkoret  $y(0) = 0$ .

3 p

- b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

3 p

Skrivningsåterlämning fredagen den 24 januari kl 14.45 i caféet i hus 5, därefter i rum 204, hus 6, Kräftriket.