STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
18 augusti 2020

Lösningar

18 augusti 2020

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$

b) $c = 1/15$

c) X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 2

d) Y är normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9

e) $V\left(\sqrt{X}\right) \approx \frac{\sigma^2}{4\mu}$

Uppgift 2

a) $\mathrm{P}(\text{ingen av } A \text{ och } B \text{ inträffar}) = 1 - \mathrm{P}(\text{ngn av } A \text{ och } B \text{ inträffar}) = 0.74.$

b) Sökt sannolikhet: $\mathrm{P}(A \cap B)$. Eftersom $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ så fås att $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0.11 + 0.17 - 0.26 = 0.02.$

c) Sökt sannolikhet: $\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.26 - 0.02 = 0.24.$

Uppgift 3

Låt C beteckna händelsen att en slumpvis vald person i regionen drabbas av lungcancer och R händelsen att personen är rökare. Givet i uppgiften är att $\mathrm{P}(C) = 0.006$, $\mathrm{P}(R) = 0.2$ och $\mathrm{P}(C|R) = 10 \cdot \mathrm{P}(C|R^c)$.

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(C|R)\mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(C|R^c)\mathrm{P}(R^c) \\
&= \mathrm{P}(C|R) \cdot 0.2 + \frac{1}{10} \cdot \mathrm{P}(C|R) \cdot 0.8 \\
&= 0.28 \cdot \mathrm{P}(C|R).
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathrm{P}(C) = 0.006$ får vi att $\mathrm{P}(C|R) = 0.006/0.28 = 0.021$.

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(R|C) = \frac{\mathrm{P}(C|R)\mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0.021 \cdot 0.2}{0.006} = 0.7.$$

Uppgift 4

a) Tätheten $f(x,y)$ är konstant på cirkeln (och 0 utanför) och för att den ska integrera sig till 1 så måste den anta värdet $1/a$ på cirkeln, där $a = 25\pi$ är cirkelns area. Alltså:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25\pi} & \text{om } x^2 + y^2 \leq 25; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

b) Vi har att $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Här är

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-5}^{5}\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \frac{x}{25\pi}dx\right)dy = \int_{-5}^{5} 0dy = 0$$

och på samma sätt fås $\mathbb{E}[Y] = 0$. Vidare har vi att

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-5}^{5} y\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \frac{x}{25\pi}dx\right)dy = \int_{-5}^{5} 0dy = 0.$$

Alltså gäller att $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

c) Variablerna X och Y är inte oberoende. Detta kan inses tex genom att notera att $\mathrm{P}(X > 4) = \mathrm{P}(Y > 4) > 0$, men $\mathrm{P}(X > 4, Y > 4) = 0$ eftersom $x^2 + y^2 > 32 > 25$ om $x > 4$ och $y > 4$.

Uppgift 5

Låt X_i vara en stokastisk variabel som anger antalet limpor som den $i$te kunden i bageriet köper.

a) Vi har att $\mathbb{E}[X_i] = \sum_k kp(k) = 0.9$ och $\mathbb{E}[X_i^2] = \sum_k k^2 p(k) = 1.5$. Variansen ges av $\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 0.69$.

b) Låt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Vi söker $\mathrm{P}(S_{100} < 95)$. Eftersom S_{100} är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så är den approximativt normalfördelad enligt Centrala gränsvärdessatsen, och vi har att $\mathbb{E}[S_{100}] = 100 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 90$ och $V(S_{100}) \overset{ober}{=} 100 \cdot V(X_i) = 69$. Vi får

$$\mathrm{P}(S_{100} \leq 95) = \mathrm{P}\left(\frac{S_{100} - 90}{\sqrt{69}} \leq \frac{95 - 90}{\sqrt{69}}\right) \overset{CGS}{\approx} \Phi(0.6) = 0.7257.$$

c) Vi söker n så att $\mathrm{P}(S_{100} \leq n) = 0.95$. Enligt ovanstående approximation ges n av

$$\frac{n - 90}{\sqrt{69}} = \lambda_{0.05} = 1.6449$$

dvs $n = 90 + 1.6449 \cdot \sqrt{69} = 103.66$. Man måste alltså baka 104 limpor.

Uppgift 6

Tätheten för X ges av

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

med analogt uttryck för $f_Y(y)$.

a) Låt $Z = X + Y$. Eftersom X och Y är oberoende så fås från faltningsformeln att

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \begin{cases} 0 & \text{om } z < 0; \\ \int_0^z dx = z & \text{om } 0 \leq z \leq 1; \\ \int_{z-1}^1 dx = 2 - z & \text{om } 1 < z \leq 2; \\ 0 & \text{om } x > 2. \end{cases}$$

b) Fördelningsfunktionen blir

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{om } z < 0; \\ \frac{z^2}{2} & \text{om } 0 \leq z \leq 1; \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{om } 1 < z \leq 2; \\ 1 & \text{om } x > 2. \end{cases}$$