STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
25 november 2020

Tentamen i Sannolikhetsteori I

25 november 2020 kl. 9–15

Examinator: Maria Deijfen, tel. 070-3369790.
Tillåtna hjälpmedel: Kursboken samt annan litteratur, beräkningsprogram, etc. Att samarbeta eller ta hjälp av någon annan person är inte tillåtet.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 2 december.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Ett heltal mellan 1 och 10 (där 1 och 10 ingår) väljs slumpmässigt. Låt $A = \{\text{talet är jämnt}\}$ och $B = \{\text{talet är mindre än } 6\}$. Vilket uttryck representerar händelsen $\{1, 3, 5\}$?

1. $A \cup B$
2. $A^c \cup B$
3. $A \cap B$
4. $A^c \cap B$

b) Du vet att $Y = (X + 3)/4$ är N(0,1)-fördelad. Vilken fördelning har X?

1. Normalfördelning med väntevärde $3/4$ och varians $1/4$.
2. Normalfördelning med väntevärde -3 och varians 4.
3. Normalfördelning med väntevärde -3 och varians 16.
4. X är inte normalfördelad

c) Låt X vara Poissonfördelad och anta att $\mathrm{P}(X = 0) = 0.15$. Vad är $\mathrm{P}(X = 1)$?

1. 0.346
2. 0.213
3. 0.285
4. 0.399

d) De diskreta stokastiska variablerna X och Y är icke-negativa och har samma väntevärde. Det största värde som X kan anta är a och det största värde som Y kan anta är b, där $b > a$. Vad gäller?

1. $\mathrm{Var}X < \mathrm{Var}Y$
2. $\mathrm{Var}X > \mathrm{Var}Y$
3. $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y$
4. Det går inte att avgöra hur varianserna förhåller sig till varandra.

e) Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2, och låt $Y = aX + b$. Vad gäller?

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = a\sigma^2$
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = a^2\sigma^2$
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) = a\mu + b$
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = a\sigma^2 + b$

Uppgift 2

I en stor låda finns påsar med 20 tulpanlökar i varje påse. I 70% av påsarna finns lökar för 8 röda och 12 gula tulpaner, och i de återstående 30% av påsarna finns lökar för 10 röda och 10 gula tulpaner. En påse väljs slumpmässigt och en slumpmässigt vald lök ur påsen planteras.

a) Vad är sannolikheten att det blir en gul tulpan?

b) Givet att det blir en gul tulpan, vad är sannolikheten att löken kom från en påse med 8 röda och 12 gula lökar?

Uppgift 3

Kostnaden för att garantireparera en bil av ett visst fabrikat som fått fel på avgasreningen under garantitiden kan antas vara en stokastisk variabel med väntevärde 4925 kr och standardavvikelsen σ kr.

a) Om $\sigma = 1000$, vad är sannolikheten att 200 slumpvalda sådana garantireparationer totalt kostar mer än 1 miljon kronor?

b) Bestäm σ så att sannolikheten att kostnaden för de 200 reparationerna överstiger 1 miljon kronor är 5%.

Uppgift 4

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+5e^x)^{1.2}} \qquad -\infty < x < \infty.$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen för X.

b) Bestäm fördelningsfunktionen för $Y = e^X$.

c) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

Uppgift 5

I en urna finns två röda och tre svarta bollar. En person drar på måfå en boll i taget utan återläggning. Låt X vara antalet dragningar till och med att båda de röda bollarna är dragna.

a) Ange sannolikhetsfunktionen för X.

b) Beräkna väntevärde och varians för X.

Uppgift 6

En tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) har täthetsfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2} & \text{för } x > 0 \text{ och } y > 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm täthetsfunktionen för X.

b) Bestäm täthetsfunktionen för $Z = XY$.

Lycka till!