STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
25 november 2020

# Lösningar

## 25 november 2020

---

### Uppgift 1

Rätt svar är

**a)** $A^c \cap B$

**b)** $X$ är normalfördelad med väntevärde -3 och varians 16.

**c)** 0.285

**d)** Det går inte att avgöra hur varianserna förhåller sig till varandra.

**e)** $a\sigma^2$

### Uppgift 2

Låt $G$ beteckna händelsen att det blir en gul tulpan, och $A$ händelsen att den påse som väljs innehåller 8 röda och 12 gula tulpaner. Händelsen $A^c$ betyder då att den valda påsen innehåller 10 röda och 10 gula tulpaner. Då gäller att $\mathrm{P}(G|A) = 0.6$ och $\mathrm{P}(G|A^c) = 0.5$. Givet i uppgiften är också att $\mathrm{P}(A) = 0.7$. Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathrm{P}(G) = \mathrm{P}(G|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(G|A^c)\mathrm{P}(A^c) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.57.$$

**b)** Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(A^c|G) = \frac{\mathrm{P}(G|A^c)\mathrm{P}(A^c)}{\mathrm{P}(G)} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.57} = 0.74.$$

## Uppgift 3

Låt $X_i$ beteckna kostnaden för den $i$:te slumpvalda garantireparationen och definiera $S_{200} = \sum_{i=1}^{200} X_i$. Då gäller att $\mathbb{E}[S_{200}] = 200 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 985000$ och $\mathrm{Var}(S_{200}) \overset{ober}{=} 200 \cdot \mathrm{Var}(X_i) = 200\sigma^2$. Eftersom $S_{200}$ är en summa av många oberoende stokastiska variabler så gäller enligt Centrala gränsvärdessatsen att $S_{200}$ är approximativt normalfördelad.

**a)** Med $\sigma = 1000$ ges den sökta sannolikheten av

$$\mathrm{P}\left(S_{200} > 1000000\right) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1000000 - 985000}{\sqrt{200} \cdot 1000}\right) = \Phi(1.06) \approx 0.1446$$

**b)** Vi söker nu $\sigma$ så att $\mathrm{P}(S_{200} > 1000000) = 0.05$ vilket, med hjälp av samma approximation som ovan, medför att

$$1 - \Phi\left(\frac{15000}{\sqrt{200} \cdot \sigma}\right) = 0.05.$$

Detta betyder att $15000/(\sqrt{200} \cdot \sigma)$ ska väljas som 5%-kvantilen i N(0,1)-fördelningen, dvs $15000/(\sqrt{200} \cdot \sigma) = 1.6449$, vilket ger $\sigma \approx 645$.

## Uppgift 4

**a)** För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \left[-\frac{1}{(1+5e^t)^{0.2}}\right]_{-\infty}^{x} = 1 - \frac{1}{(1+5e^x)^{0.2}}.$$

**b)** Med $Y = e^X$ får vi, för $y \geq 0$, att

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(e^X \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \log y) = F_X(\log y) = 1 - \frac{1}{(1+5y)^{0.2}}.$$

För $y < 0$ gäller att $F_Y(y) = 0$.

**c)** Täthetsfunktionen ges av derivatan av fördelningsfunktionen och vi får att $f_Y(y) = (1+5y)^{-1.2}$ för $y \geq 0$, och $f_Y(y) = 0$ för $y < 0$.

## Uppgift 5

**a)** Vi har för $k = 2, 3, 4, 5$ att

$$\mathrm{P}(X \leq k) = \frac{\binom{k}{2}\binom{3}{k-2}}{\binom{5}{k}}.$$

För att inse detta noterar vi att det totala antalet urvalet om $k$ bollar är $\binom{5}{k}$ och att det totala antalet urval om $k$ bollar som innehåller de två röda bollarna är $\binom{3}{k-2}$. För varje urval som innehåller de två röda bollarna kan vi sedan välja på $\binom{k}{2}$ sätt i vilka dragningar de ska dras. Det följer att $\mathrm{P}(X \leq 2) = 1/10$, $\mathrm{P}(X \leq 3) = 3/10$, $\mathrm{P}(X \leq 4) = 6/10$ och $\mathrm{P}(X \leq 5) = 1$, vilket ger $\mathrm{P}(X = 2) = 1/10$, $\mathrm{P}(X = 3) = 2/10$, $\mathrm{P}(X = 4) = 3/10$ och $\mathrm{P}(X = 5) = 4/10$.

**b)** Väntevärdet blir $\mathbb{E}[X] = \frac{2}{10} + \frac{3 \cdot 2}{10} + \frac{4 \cdot 3}{10} + \frac{5 \cdot 4}{10} = 4$. Variansen kan beräknas genom $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, där $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2^2}{10} + \frac{3^2 \cdot 2}{10} + \frac{4^2 \cdot 3}{10} + \frac{5^2 \cdot 4}{10} = 17$. Alltså får vi att $\mathrm{Var}(X) = 17 - 16 = 1$.

## Uppgift 6

**a)** För $x \geq 0$ ges täthetsfunktionen för $X$ av

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2} dy = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

För $x < 0$ är $f_X(x) = 0$.

**b)** Vi härleder först fördelningsfunktionen för $Z$. Eftersom $Z$ bara antar positiva värden, så gäller att $F_Z(z) = 0$ för $z < 0$. För $z \geq 0$ fås:

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(XY \leq z) = \mathrm{P}((X,Y) \in A),$$

där $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq z/x\}$ och vidare

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}((X,Y) \in A) &= \int_0^{\infty} \int_0^{z/x} \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2} dy dx \\
&= \int_0^{\infty} \left[ \frac{-1}{(1+x)^2(1+xy)} \right]_{y=0}^{y=z/x} dx \\
&= \left[ \frac{-z}{(1+x)^2(1+z)} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{z}{1+z}.
\end{aligned}$$

Tätheten blir alltså

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2} & \text{för } z \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$