STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
7,5 hp
2019-03-18, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E.

---

1. **(7 p.)** Använd Gausselimination för att bestämma alla lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Lösning: Vi skriver systemet som matris och använder Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 7/4 & -5/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 & 0 \end{array}\right).$$

Härifrån ser vi att det finns oändligt många lösningar. Eftersom det finns inget pivotelement i den fjärde kolumnen, sätter vi $t = x_4$. Den tredje raden ger oss då

$$x_3 = \frac{10}{7}t.$$

När vi sätter in detta i den andra raden får vi

$$x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{7}t - \frac{1}{2}t = 1 - \frac{6}{7}t.$$

Den första raden ger då

$$x_1 = 1 + 3x_3 - x_4 = 1 + 3 \cdot \frac{10}{7}t - t = 1 + \frac{23}{7}t.$$

Detta ger den allmänna lösningen där t är ett godtyckligt reellt tal.

2. **(7 p.)** Låt $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

   (a) Bestäm definitionsmängden för f.

   (b) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.

   (c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) Skissa grafen av f.

Lösning: (a) $\sqrt{x}$ existerar för alla $x \geq 0$ och e^{-x} är definierat för alla reella x. Därför består definitionsmängden av alla $x \geq 0$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

(b) Med produktregeln får vi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-x}.$$

Därför är $f'(x) = 0$ bara om $1/2 - x = 0$, vilket betyder $x = 1/2$. Lokala minimi- och maximipunkter kan alldeles bara ligger på $x = 1/2$ eller på definitionsmängdens enda randpunkt $x = 0$. Vi kan testa genom att beräkna värdena $f(0)$ och $f(1/2)$ samt funktionsvärdena på en godtycklig testpunkt i intervallet $(0, 1/2)$ och en testpunkt i intervallet $(1/2, \infty)$:

$$f(0) = 0, \qquad f(1/4) = \frac{1}{2}e^{-1/4}, \qquad f(1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \qquad f(1) = e^{-1}.$$

Man ser enkelt att $f(1/2) > f(1/4)$ och $f(1/2) > f(1)$, vilket implicerar att $1/2$ är en lokal maximipunkt. Dessutom är $f(x) > 0$ för alla $x > 0$, vilket ger att $x = 0$ är en lokal minimipunkt.

(c) Vi kan skriva $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ och båda täljaren och nämnaren går mot ∞ när x går mot ∞. Därför får vi använder L'Hopitals regel som ger

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0$$

eftersom $\sqrt{x}e^x$ går mot ∞.

(d) ...kan enkelt ritas med datorn.

3. **(8 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int 8x^2(3x^3-1)^{2019}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi börjar med

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left(1^3 - (-1)^3\right) = \frac{1}{3}.$$

Andra integralen beräknas som

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Den sista integralen beräknar vi genom substitutionen $u = 3x^3 - 1$, så att $\mathrm{d}u = 9x^2\mathrm{d}x$. Därför har vi

$$\begin{aligned}\int 8x^2(3x^3-1)^{2019}\,\mathrm{d}x &= \frac{8}{9}\int (3x^3-1)^{2019}9x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{9}\int u^{2019}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2020}u^{2020} + C = \frac{2}{4545}(3x^3-1)^{2020} + C.\end{aligned}$$

4. **(4 p.)** Bestäm alla x för vilka serien $3+3(x-4)+3(x-4)^2+3(x-4)^3+\ldots$ konvergerar. För vilket x är seriens värde lika med 20?

   Lösning: Serien är den geometriska serien med $a=3$ och $k=x-4$. Denna konvergerar precis om $|x-4|<1$, vilket är ekvivalent med

$$3<x<5.$$

   För sådana x blir gränsvärdet av serien

$$\frac{3}{1-(x-4)}=\frac{3}{5-x}.$$

   Detta liknar 20 om $3=20(5-x)=100-20x$, vilket är ekvivalent med $20x=97$ eller $x=\frac{97}{20}$.

5. **(6 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen $f(x)=\ln(1+e^x)$ kring $x_0=0$.

   Lösning: Derivatorna av f ges av

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x}{1+e^x}, \\ f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)^2-e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = e^x\frac{1-e^x}{(1+e^x)^3}. \end{aligned}$$

   Därifrån får vi

$$f(0)=\ln 2, \qquad f'(0)=\frac{1}{2}, \qquad f''(0)=\frac{1}{4}, \qquad f'''(0)=0.$$

   Vi sätter in dessa värden i Taylorformeln och får Taylorapproximationen

$$f(x)\approx \ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+0x^3.$$

6. **(8 p.)** Skissa triangeln med hörnen $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ i planet och bestäm minimum och maximum av funktionen $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ på denna triangel.

   Lösning: Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x^2+y^2}2x \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x^2+y^2}2y.$$

   Ekvationen $e^{x^2+y^2}2x=0$ ger $x=0$ och då blir den andra ekvationen $e^{y^2}2y=0$, vilket ger $y=0$. Således är $(0,0)$ den enda kritiska punkten, men den ligger inte i triangeln. Därför måste båda minimum och maximum ligga på randen.

   Randen består av tre delar. Den första sidan beskrivs genom $y=1$ och $0\le x\le 1$. Där har funktionen formen $g(x)=f(x,1)=e^{x^2+1}$. Denna funktion är växande för $0\le x\le 1$, vilket innebär att den antar sitt minsta och största värde på randpunkterna, d.v.s. för $x=0$ och $x=1$ (alltså på hörnen). Detta ger dem två punkterna $(0,1)$ och $(1,1)$ som eventuella extrempunkter.

Samma argumentationen för sidan med $x = 1$ och $0 \leq y \leq 1$ ger de möjliga extrempunkterna $(1, 0)$ och (igen) $(1, 1)$.

Sidan som inte är parallell till någon axel beskrivs genom $0 \leq x \leq 1$ och $y = 1 - x$. Funktionen f har där formen

$$g(x) = e^{x^2+(1-x)^2} = e^{2x^2-2x+1}.$$

Denna funktion är inte monoton för $0 \leq x \leq 1$. Därför deriverar vi g för att hitta möjliga minimi- och maximipunkter. Vi har

$$g'(x) = (4x - 2)e^{2x^2-2x+1},$$

vilket är noll om $4x - 2 = 0$, d.v.s. om $x = 1/2$. Då är $y = 1 - 1/2 = 1/2$ och vi har en till möjlig extrempunkt.

Vi beräknar nu funktionsvärdena,

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= e, \\ f(0, 1) &= e, \\ f(1, 1) &= e^2, \\ f(1/2, 1/2) &= e^{1/2} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Största av värdena är e^2 och minsta värdet är $\sqrt{e}$. Därför är e^2 maximum och $\sqrt{e}$ minimum av f på triangeln.