STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Salvador Rodriguez-Lopez
MM3001-7,5 hp

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
2020-02-19, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E. Observera att talen inte är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. **(6 p.)** Låt $f(x) = 30 + 12x + 3x^2 - 2x^3$.
   (a) Finn alla lokala extremum till funktionen f.
   (b) Ange på vilka intervall funktionen är växande resp. avtagande.
   (c) Har funktionen något globalt maximum och/eller minimum?

2. **(7 p.)** Beräkna integralerna

$$\text{a)} \int_0^1 x e^{x^2+1} \mathrm{d}x, \qquad \text{och} \qquad \text{b)} \int \left(x^{-1/2} \ln(x^2) + \frac{x + x^3}{\sqrt[3]{3 + 2x^2 + x^4}} \right) \mathrm{d}x$$

3. **(6 p.)** Skriv följande system i matrisform (d.v.s. skriv systemet som $A \cdot v = b$, när A är en 3×3-matris, v är en 3×1-matris och b är en 3×1-matris)

$$\begin{cases} 3x + 6y + 6z = 6 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 8y + 10z = 8 \end{cases}$$

   Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet.

4. **(7 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av ordning tre kring punkten $x = 1$ till funktionen

$$f(x) = xe^x + e \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

   I vilken punkt skär tangentlinjen till grafen av f i $(1, f(1))$ y-axeln?

5. **(7 p.)** Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$f(x, y) = -x^2 + y^2 + 2$$

   i det triangulära område i planet som har hörn i punkterna $(1, 1)$, $(3, -1)$ och $(5, 5)$.

6. **(7 p.)** Bestäm alla reella tal a sådana att den oändliga serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n e^{-an}$, konvergerar. För vilket värde på a är seriens summa lika med 5?

Var god vänd!

FORMLER

Approximation av f kring $x = x_0$ given av Taylorpolynomet av ordning n:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Lösningsförslag läggs upp på kurssidan efter skrivningen.

Tentamensåterlämning: Tisdag 3 Mars 2020, kl. 11:00 - 11:15, i rum 402 (Kräftriket 6).

Efter återlämningstiden finns skrivningarna att hämta på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamen: Matematiska metoder för ekonomer

1. (a) Vi har att för alla $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2).$$

Då stationära punkter är $x = 2$ och $x = -1$. Notera att $f''(x) = -12x + 2$ och att

$$18 = f''(-1) > 0 > f''(2) = -18,$$

då funktionen har en lokal minimum i $x = -1$ och en lokal maximum i $x = 2$.

(b) Funktionen är växande i $(-1, 2)$ och avtagande i $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

(c) Notera att

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

då drar vi slutsatsen att funktionen saknas globalt maximum och minimum.

2. (a) $\frac{1}{2}(e-1)e$.

(b) $4\sqrt{x}(\ln(x) - 2) + \frac{3}{8}(x^4 + 2x^2 + 3)^{2/3} + C$, då $C \in \mathbb{R}$;

3. Systemet skrivs om som

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Gausseliminering ger oss att

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Då har systemet en oändlig antal av lösningar

$$x = t, \qquad y = 1 - t/2, \qquad z = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

som kan också skrivas om som

$$x = 2 - 2t, \qquad y = t, \qquad z = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. Vi beräknar först successiva derivator för den givna funktionen:

$$f'(x) = e^x x + e^x - \frac{e}{x},$$
$$f''(x) = \frac{e}{x^2} + e^x x + 2e^x,$$
$$f'''(x) = -\frac{2e}{x^3} + e^x x + 3e^x.$$

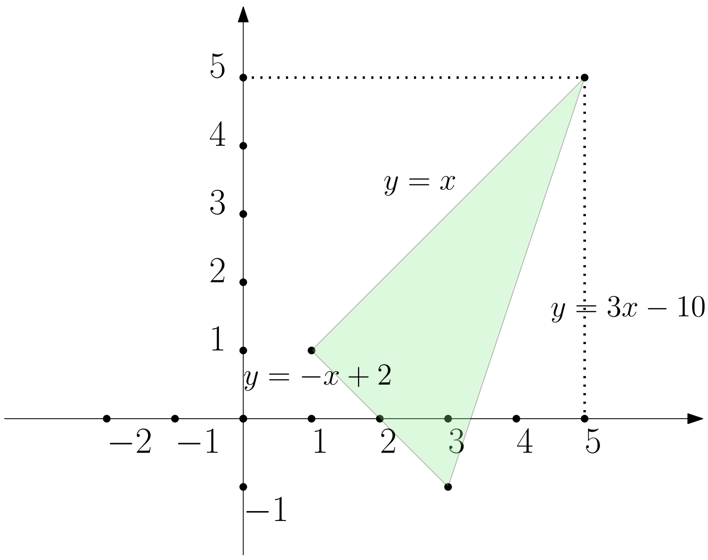
Evaluering i $x = 1$ ger

$$f(1) = e,$$
$$f'(1) = e,$$
$$f''(1) = 4e,$$
$$f'''(1) = 2e.$$

Insättning i Taylors formel för Taylorpolynom av grad 3 ger

$$P_3(x) = e + e(x-1) + 2e(x-1)^2 + \frac{1}{3}e(x-1)^3.$$

Den ekvation av tangentlinjen till grafen av f i punkten $(1, f(1)) = (1, e)$ är $y = e + e(x-1) = ex$ som skär y-axeln i $y = 0$.



5. Området D ser ut som visas i figuren. Randen av området kan beskrivas som tre segmenten:

$$S_1 := \{(x, y) : \, x \in [1, 3], y = -x + 2\} \, ,$$
$$S_2 := \{(x, y) : \, x \in [3, 5], y = 3x - 10\} \, ,$$
$$S_3 := \{(x, y) : \, x \in [1, 5], y = x\} \, .$$

Derivering ger oss att

$$\partial_x f(x, y) = -2x,$$
$$\partial_y f(x, y) = 2y.$$

Då saknas stationära punkt i området.

Hörnen av området är $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (3, -1)$ och $P_3 = (5, 5)$. Då får vi att

$$f(1, 1) = 2, \quad f(3, -1) = -6, \qquad f(5, 5) = 2.$$

För alla punkter (x, y) i randen S_1 får vi att

$$h_1(x) := f(x, y) = 6 - 4x, \qquad x \in [1, 3],$$

som har minimum -6 i hörnet P_1, och maximum 2 i hornet P_0.

För alla punkter $(x, y) \in S_2$ får vi att

$$h_2(x) := f(x, y) = 8x^2 - 60x + 102, \qquad x \in [3, 5].$$

Undersökningen av stationära punkter för detta funktion ger oss att

$$h_2'(x) = -60 + 16x = 0 \iff x = 15/4 \in (3, 5).$$

Och vi har att

$$h_2(15/4) = -21/2.$$

För alla punkter $(x, y) \in S_3$ får vi att

$$h_3(x) := f(x, y) = 2, \qquad x \in [1, 5],$$

Sammanfattningsvis är att den maximum av funktionen på området är 2 och den minimum är $-21/2$.

6. Den geometriska serien konvergerar om $\frac{5e^{-a}}{4} < 1$. Det är ekvivalent med $a > \ln(5/4)$. Därför för alla reella tal $a \in (\ln(5/4), +\infty)$, seriens summa $S(a)$ är

$$S(a) = \frac{5}{4e^a - 5}.$$

Då får vi att

$$S(a) = 5 \Leftrightarrow 4e^a - 5 = 1 \Leftrightarrow a = \ln\frac{3}{2}.$$