STOCKHOLMS UNIVERSITET	MT 5003
MATEMATISKA INSTITUTIONEN	TENTAMEN
Avd. Matematisk statistik	1 november 2019

Tentamen i Statistisk inferensteori 1 november 2019, kl. 9-14

Examinator: Chun-Biu Li, cbli@math.su.se.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare tillhandahålles av institutionen, personlig ej tillåten. Formelsamling på tentamens sista sidor.
återlämning: Meddelas i kurshemsidans forum.

Resonemang skall vara tydliga och lätta att följa. Varje korrekt och fullständigt löst uppgift ger 10 poäng. För betyg A-E krävs 20 poäng på Del 1, samt att följande gränser uppnås på Del 2:

A	B	C	D	E
25	19	13	7	0

Del 1

Låt $X = (X_1, \ldots, X_n)$ beteckna en vektor av n oberoende *Geometrisk*(θ)-fördelade stokastiska variabler och $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en realisering av densamma.

Uppgift 1

a) Bestäm ML-skattaren av $(1-\theta)/\theta$ och visa att den är väntevärdesriktig. (4p)

Lösning: ML-skattaren av $(1-\theta)/\theta$ ges av $(1-\hat{\theta})/\hat{\theta}$, där $\hat{\theta}$ är ML-skattaren av θ (ML-skattarens invarians under omparametrisering). För att bestämma $\hat{\theta}$ maximerar vi log-likelihood funktionen

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log p(x_i|\theta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \log(1-\theta) + \log(\theta)),$$

där vi utnyttjat att oberoende och geometriskt fördelade. Lösning av $l'(\theta) = 0$ ger ML-skattaren $\hat{\theta} = 1/(1+\bar{x})$ och $(1-\hat{\theta})/\hat{\theta} = \bar{x}$.
En skattare $\hat{g}$ av $g(\theta)$ är väntevärdesriktig om $E(\hat{g}) = g(\theta)$. Enligt formelsamling gäller att $(1-\theta)/\theta = E(X_1) = E(\bar{X})$. Skattaren $\bar{x}$ är alltså väntevärdesriktig skattare av $(1-\theta)/\theta$.

b) Definiera begreppet tillräcklig (sufficient) stickprovsvariabel. (3p)

Lösning: En stickprovsvariabel $T = h(X)$ är tillräcklig om fördelningen för $X|T = t$ ej beror på θ för något t.

c) Bestäm en endimensionell tillräcklig (sufficient) stickprovsvariabel. (3p)

Lösning: Enligt faktoriseringskriteriet är en stickprovsvariabel $T = h(X)$ tillräcklig om $p_X(x|\theta) = g_1(h(x), \theta)g_2(x)$. I det aktuella fallet är

$$p_X(x|\theta) = (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^n = g_1(\sum_{i=1}^n x_i, \theta)g_2(x)$$

där $g_1(h, \theta) = (1-\theta)^h\theta^n$ och $g_2(x) = 1$. En tillräcklig stickprovsvariabel ges därför av $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i$.

Uppgift 2

a) Beskriv hur standardfelet hos ML-skattaren $\hat{\theta}$ kan uppskattas med parametrisk Bootstrap. (5p)

Lösning:

1. Simulera N stickprov bestående av n oberoende dragningar ifrån $Geometrisk(\hat{\theta})$.
2. För vart och ett av de N stickproven, bestäm värdet på ML-skattaren av θ.
3. Uppskatta standardfelet genom att bestämma den empiriska standardavvikelsen av de N ML-skattningarna i 2).

b) Bestäm aposteriorifördelningen för θ givet Jeffreys prior, ange även en konjungerande familj av apriorifördelningar. (5p)

Lösning: Jeffreys apriorifördelning ges av $J(\theta)^{1/2}$ där J är förväntad Fisherinformation. Genom att derivera log-likelihoodfunktionen två gånger och byta tecken får vi $I(\theta) = n/\theta^2 + \sum_{i=1}^n X_i/(1-\theta)^2$ och $J(\theta) = E(I(\theta)) = n/\theta^2 + nE(X_1)/(1-\theta)^2 = n/(\theta^2(1-\theta))$. Apriorifördelningen blir således $p(\theta) \propto (1-\theta)^{-1/2}\theta^{-1}$ och aposteriorifördelningen

$$\begin{aligned} p(\theta|x) &\propto p(x|\theta) \times p(\theta) \propto (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^n \times (1-\theta)^{-1/2}\theta^{-1} \\ &= (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - 1/2}\theta^{n-1}, \end{aligned}$$

vilket känns igen som en $Beta(n, \sum_{i=1}^n x_i + 1/2)$-fördelning.
Om vi ersätter $p(\theta)$ med en $Beta(\alpha, \beta)$-fördelning ovan får vi aposteriorifördelningen $Beta(n+\alpha, \sum_{i=1}^n x_i + \beta)$. Familjen av betafördelningar utgör därför en konjungerande familj av apriorifördelningar till den geometriska likelihooden.

Uppgift 3

a) För ML-skattaren gäller att $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ konvergerar i fördelning mot $N(0, \sigma^2)$. Vad är σ^2 och hur kan resultatet användas för att bestämma ett standardfel för $\hat{\theta}$? (5p)

Lösning: Det följer ur ML-skattarens asymptotik att $\sigma^2 = J_1(\theta)^{-1} = \theta^2(1-\theta)$, där J_1 betecknar förväntad Fisherinformation för en observation. Detta innebär att variansen för $\hat{\theta}$ är approximativt $\sigma^2/n = \theta^2(1-\theta)/n$ och ett standardfel ges av $se(\hat{\theta}) = \sqrt{\hat{\theta}^2(1-\hat{\theta})/n}$

b) Härled att uttryck för Score statistikan $T_S(x)$ för hypotesen $H_0 : \theta = 1/2$. Kan nollhypotesen förkastas på nivån 0.05 om vi observerar $T_S(x) = 4.3$? Stickprovsstorleken kan antas stor nog för att asymptotiska resulat skall gälla med god noggrannhet. (5p)

Lösning: Score-statistikan ges av

$$T_S(x) = \frac{S(\theta_0)^2}{J(\theta_0)} = \frac{(1-\theta_0(1+\bar{x}))^2}{\theta_0} = (1-\bar{x})^2/2,$$

efter insättning av $\theta_0 = 1/2$.
Då Score-statistikan är asymptotiskt $\chi^2(1)$-fördelad under H_0 kan vi förkasta hypotesen då $4.3 > 3.84$, där 3.84 är övre 95% kvantilen för $\chi^2(1)$-fördelningen.

Del 2

Uppgift 4

a) Formulera Cramér-Raos olikhet. Använd den för att visa att odds-skattaren i uppgift 1a) har minst varians av alla väntevärdesriktiga skattare, utan att hänvisa till asymptotiska resultat. (5p)

Lösning: Låt $\hat{g}$ vara en väntevärdesriktig skattare av $g(\theta)$. Då gäller under regularitetsvillkor att $Var(\hat{g}) \geq g'(\theta)^2/J(\theta)$.
För den aktuella skattaren $\hat{g} = g(\hat{\theta}) = (1-\hat{\theta})/\hat{\theta} = \bar{x}$ har vi att

$$Var(\hat{g}) = Var(\bar{X}) = \frac{1-\theta}{(n\theta^2},$$

och

$$\frac{g'(\theta)^2}{J(\theta)} = \frac{1/\theta^4}{n/(\theta^2(1-\theta)} = \frac{1-\theta}{(n\theta^2}.$$

Det råder således likhet.

b) Härled den asymptotiska fördelningen hos ML-skattaren under regularitetsvillkor genom att göra en första ordningens Taylorapproximation av scorefunktionen. Högre ordningens termer kan antas försumbara utan närmare motivering. (5p)

Lösning: Se lärobok sid 98.

Uppgift 5

Låt y utgöra ett datamaterial från en fördelning med parameter θ. För att skatta precisionen hos en Bayesiansk punktskattare $\hat{\theta}(y)$ av θ kan man använda medelkvadratfelet $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2] = \int f(\theta|y)(\theta-\hat{\theta}(y))^2 d\theta$. Här betecknar $f(\theta|y)$ tätheten för aposteriorifördelningen.

a) Låt $\mu = E_{\theta|y}(\theta)$ beteckna väntevärdet för aposteriorifördelningen. Visa att medelkvadratfelet $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2]$ kan skrivas på formen $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2] = Var_{\theta|y}(\theta) + (\mu-\hat{\theta}(y))^2$ genom att, som ett första steg, använda att $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2] = E_{\theta|y}[(\theta-\mu+\mu-\hat{\theta}(y))^2]$. Motivera varje steg tydligt. (6p)

Lösning:

$$\begin{aligned} E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2] &= E_{\theta|y}[(\theta-\mu+\mu-\hat{\theta}(y))^2] \\ &= E_{\theta|y}[(\theta-\mu)^2 + 2(\theta-\mu)(\mu-\hat{\theta}(y)) + (\mu-\hat{\theta}(y))^2] \\ &= Var_{\theta|y}(\theta) + 2[\mu-\hat{\theta}(y)][E_{\theta|y}(\theta)-\mu] + (\mu-\hat{\theta}(y))^2 \\ &= Var_{\theta|y}(\theta) + (\mu-\hat{\theta}(y))^2. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Använd del a) för att hitta den Bayesianska punktskattare $\hat{\theta}(y)$ för vilken medelkvadratfelet $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2]$ är minimerat. Vad är det minimala värdet på $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2]$? (4p)

Lösning: From part a, $E_{\theta|y}[(\theta-\hat{\theta}(y))^2] \geq Var_{\theta|y}(\theta)$. Equality holds when $\hat{\theta}(y) = \mu$.

Kommentar: Både deluppgift a) och b) kan lösas i ungefär fem steg eller färre. Om din lösning blir väldigt lång så behöver du troligtvis testa ett annat angripssätt.

Uppgift 6

Rayleighfördelningen fås som specialfallet av Weibullfördelningen då formparametern $k = 2$ $(Rayleigh(\lambda^2/2) = Weibull(\lambda, 2))$. I denna uppgift skall du anta att du har tillgång till n oberoende observationer från en $Weibull(\lambda, k)$-fördelning.

a) Bestäm score-vektorn. (2p)

Lösning: Log-likelihood function $l(\lambda, k) = -nk\log\lambda + n\log k + (k-1)\sum_{i=1}^n \log x_i - \lambda^{-k}\sum_{i=1}^n x_i^k$.
Score vector $S(\lambda, k) = (\partial l(\lambda,k)/\partial\lambda, \partial l(\lambda,k)/\partial k)^\top$
$= \left(\frac{-nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}\sum_{i=1}^n x_i^k, -n\log\lambda + \frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \log x_i - \lambda^{-k}\sum_{i=1}^n x_i^k \log\frac{x_i}{\lambda}\right)^\top$

b) Bestäm den observerade Fisherinformationsmatrisen. (3p)

Lösning:
Fisher information matrix $I(\lambda, k) = \begin{pmatrix} -\partial^2 l(\lambda,k)/\partial\lambda^2 & -\partial^2 l(\lambda,k)/\partial\lambda\partial k \\ -\partial^2 l(\lambda,k)/\partial\lambda\partial k & -\partial^2 l(\lambda,k)/\partial k^2 \end{pmatrix}$,
with
$-\partial^2 l(\lambda,k)/\partial\lambda^2 = \frac{k(k+1)}{\lambda^{k+2}}\sum_{i=1}^n x_i^k - \frac{nk}{\lambda^2}$,
$-\partial^2 l(\lambda,k)/\partial\lambda\partial k = -\frac{k}{\lambda^{k+1}}\sum_{i=1}^n x_i^k\left(\log\frac{x_i}{\lambda} - 1\right) + \frac{n}{\lambda}$,
$-\partial^2 l(\lambda,k)/\partial k^2 = -\frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^n x_i^k\left(\log\frac{x_i}{\lambda}\right)^2 + \frac{n}{k^2}$.

c) Bestäm ett uttryck för profil-likelihooden för parametern k. (3p)

Lösning: Profile likelihood $L_p(k) = \max_\lambda L(\lambda, k) = L(\hat{\lambda}(k), k)$ with $\hat{\lambda}(k) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}\right)^{1/k}$ the ML-estimator of λ for fixed k. Then

$$\begin{aligned} L_p(k) &= \frac{k^n}{\hat{\lambda}(k)^{nk}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{\hat{\lambda}(k)^k}\right) \prod_{i=1}^n x_i^{k-1} \\ &= \left(\frac{kn}{\sum_{i=1}^n x_i^k}\right)^n \exp(-n) \prod_{i=1}^n x_i^{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

d) Beskriv hur man kan utföra ett Generalized-likelihood-ratio-test av hypotesen $H_0 : k = 2$ på nivån 5%. Du kan hänvisa till ML-skattarna $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ och $\hat{k}_{\mathrm{ML}}$ utan att ange deras explicita uttryck. (2p)

Lösning: See p. 148 of the course book.

Lycka till!

Formelsamling med användbara fördelningar

Betafördelningen $X \sim Beta(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$E(X) = \alpha/(\alpha+\beta)$, $V(X) = \alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$

Binomialfördelningen $X \sim Binomial(n, p), \quad 0 \leq p \leq 1, n = 1, 2, \ldots.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

χ^2**-fördelningen** $X \sim \chi^2(k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = k$, $V(X) = 2k$.
Några approximativa kvantiler:

$k = 1; \quad P(X > 3.84) = 0.05$
$k = 2; \quad P(X > 5.99) = 0.05$
$k = 3; \quad P(X > 7.81) = 0.05$

Gammafördelningen $X \sim Gamma(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \alpha/\beta$, $V(X) = \alpha/\beta^2$.

Geometriska fördelningen $X \sim Geometrisk(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x;\theta) = (1-\theta)^x\theta, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = (1-\theta)/\theta$, $V(X) = (1-\theta)/\theta^2$.

Normalfördelningen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$.
Täthetsfunktion:

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big), \quad -\infty < x < \infty.$$

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.
Några approximativa kvantiler för $N(0,1)$:
$P(X > 2.58) = 0.005, P(X > 2.33) = 0.01, P(X > 1.96) = 0.025, P(X > 1.64) = 0.05$.

Poissonfördelningen $X \sim Poisson(\lambda)$, $\quad \lambda > 0$.
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|\lambda) = \frac{1}{x!}\lambda^x \exp(-\lambda), \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

Rayleighfördelningen $X \sim Rayleigh(\theta)$, $\quad \theta > 0$.
Täthetsfunktion:

$$p(x|\theta) = \frac{x}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{2\theta}), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \sqrt{\pi\theta/2}$, $V(X) = (4-\pi)\theta/2$.

Weibullfördelningen $X \sim Weibull(\lambda, k)$, $\quad \lambda > 0, k > 0$.
Täthetsfunktion:

$$p(x|\lambda, k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \lambda\Gamma(1 + 1/k)$, $V(X) = \lambda^2(\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma(1 + 1/k)^2)$.