STOCKHOLMS UNIVERSITET	MT 5003
MATEMATISKA INSTITUTIONEN	TENTAMEN
Avd. Matematisk statistik	27 november 2019

Tentamen i Statistisk inferensteori
27 november 2019, kl. 9-14

Examinator: Chun-Biu Li, cbli@math.su.se.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare tillhandahålles av institutionen, personlig ej tillåten. Formelsamling på tentamens sista sidor.
återlämning: Meddelas i kurshemsidans forum.

Resonemang skall vara tydliga och lätta att följa. Varje korrekt och fullständigt löst uppgift ger 10 poäng. För betyg A-E krävs 20 poäng på Del 1, samt att följande gränser uppnås på Del 2:

A	B	C	D	E
25	19	13	7	0

Del 1

Låt $X = (X_1, \ldots, X_n)$ beteckna en vektor av n oberoende $Gamma(3, \theta)$-fördelade stokastiska variabler och $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en realisering av densamma.

Uppgift 1

a) Bestäm score-funktionen $S(\theta)$ och verifiera att $E_\theta(S(\theta)) = 0$. (3p)

b) Använd faktoriseringskriteriet för att visa att ML-skattaren av θ är en tillräcklig (sufficient) stickprovsvariabel (4p)

c) Visa att $g(x, \theta) = \theta \sum_{i=1}^n x_i$ är en pivåvariabel. (3p)

Uppgift 2

a) Beskriv hur ML-skattarens väntevärdesfel (bias) kan uppskattas med parametrisk Bootstrap. (5p)

b) Visa att familjen av $Gamma(\alpha, \beta)$-fördelningar utgör en konjungerande familj av apriorifördelningar för θ. (5p)

Uppgift 3

a) För ML-skattaren $\hat{\theta}$ gäller att $\sqrt{n}(\hat{\theta}^2 - \theta^2)$ konvergerar i fördelning mot $N(0, \sigma^2)$. Vad är σ^2? (5p)

b) Härled att uttryck för likelihood-kvot statistikan $T_L(x)$ för hypotesen $H_0 : \theta = 1$. Kan nollhypotesen förkastas på nivån 0.05 om vi observerar $T_L(x) = 4.3$? Stickprovsstorleken kan antas stor nog för att asymptotiska resulat skall gälla med god noggrannhet. (5p)

Del 2

Uppgift 4

a) Formulera och visa Cramér-Raos olikhet. (5p)

b) Låt $S(\theta)$ och $J(\theta)$ beteckna score-funktion och förväntad Fisherinformation. Visa att $S(\theta)/\sqrt{J(\theta)}$ är en asymptotisk pivåvariabel. (5p)

Uppgift 5

Låt $\mathbf{X}_{1:n}$ bestå av n oberoende observationer från en bivariat normalfördelning med väntevärdesvektor $\mu = 0$ och kovariansmatris $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}$, där $\sigma^2 \neq 0$.

a) Bestäm ML-skattarna $\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}}$ och $\hat{\rho}_{\mathrm{ML}}$. (5p)

Hjälp med matrisinvertering: För reella tal a, b, c sådana att $ac \neq b^2$ gäller $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

b) Bestäm profil-likelihood-funktionen $L_p(\rho)$. (3p)

c) Beskriv, i termer av resultaten från a) och b), hur man kan utföra ett generalized-likelihood-ratio-test av hypotesen $H_0 : \rho = 0$ på nivån 5%. (2p)

Uppgift 6

Låt $(x_1, \dots, x_n)$ vara ett slumpmässigt stickprov från en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

a) Bestäm Fishers förväntade informationsmatris $\mathbf{J}(\mu, \sigma)$. (6p)

b) Bestäm Jeffreys bivariata apriorifördelning $f(\mu, \sigma)$. Är fördelningen $f(\mu, \sigma)$ "proper" eller "improper"? (4p)

Lycka till!

Formelsamling med användbara fördelningar

Betafördelningen $X \sim Beta(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$E(X) = \alpha/(\alpha+\beta)$, $V(X) = \alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$

Binomialfördelningen $X \sim Binomial(n, p), \quad 0 \leq p \leq 1, n = 1, 2, \ldots.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

χ^2**-fördelningen** $X \sim \chi^2(k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = k$, $V(X) = 2k$.
Några approximativa kvantiler:

$k = 1; \quad P(X > 3.84) = 0.05$
$k = 2; \quad P(X > 5.99) = 0.05$
$k = 3; \quad P(X > 7.81) = 0.05$

Gammafördelningen $X \sim Gamma(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \alpha/\beta$, $V(X) = \alpha/\beta^2$.

Geometriska fördelningen $X \sim Geometrisk(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x; \theta) = (1-\theta)^x \theta, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = (1-\theta)/\theta$, $V(X) = (1-\theta)/\theta^2$.

Normalfördelningen $\mathbf{X} \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma}), \quad \det \mathbf{\Sigma} > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(\mathbf{x}|\mu, \mathbf{\Sigma}) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

$E(\mathbf{X}) = \mu$, $Cov(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.
Några approximativa kvantiler för 1-dimensionella $N(0,1)$:
$P(X > 2.58) = 0.005, P(X > 2.33) = 0.01, P(X > 1.96) = 0.025, P(X > 1.64) = 0.05.$

Poissonfördelningen $X \sim Poisson(\lambda), \quad \lambda > 0.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|\lambda) = \frac{1}{x!}\lambda^x \exp(-\lambda), \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

Rayleighfördelningen $X \sim Rayleigh(\theta), \quad \theta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\theta) = \frac{x}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{2\theta}), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \sqrt{\pi\theta/2}$, $V(X) = (4-\pi)\theta/2$.

Weibullfördelningen $X \sim Weibull(\lambda, k), \quad \lambda > 0, k > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\lambda, k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \lambda\Gamma(1+1/k)$, $V(X) = \lambda^2(\Gamma(1+2/k) - \Gamma(1+1/k)^2)$.