Lösningar till tentamen

Matematisk för Naturvetenskaper II, 190819.

1) Vi observerar att $2019 \equiv 3 \pmod 7$, antingen genom direkt division eller genom att t ex observera att $2019 \equiv 2019-2100 = -81 \equiv -81+84 = 3$. Det följer att

$$2019^{2019} \equiv 3^{2019} = (3^2)^{1009} \cdot 3^1 =$$

$$9^{1009} \cdot 3 \equiv 2^{1009} \cdot 3 = (2^3)^{336} \cdot 2^1 \cdot 3 =$$

$$8^{336} \cdot 6 \equiv 1^{336} \cdot 6 = 6.$$

Resten blir alltså 6.

2.a) Den första siffran kan väljas godtyckligt bland talen $1, 2, \ldots, 9$, dvs på 9 olika sätt. Den andra siffran kan väljas som vilket som helst av talen $0, 1, \ldots, 9$ men med undantag för det tal som vi valde i första steget, dvs också på 9 olika sätt. Den tredje siffran kan väljas som vilket som helst av talen $0, 1, \ldots, 9$ men med undantag för de två tal som vi valt i de två föregående stegen, dvs på 8 olika sätt. Multiplikationsprincipen ger nu att det totala antalet tresiffriga tal med olika siffror blir

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

b) Vi delar upp i tre fall:
De två första två siffrorna lika: Denna siffra kan väljas bland talen $1, 2, \ldots, 9$, dvs vi har 9 möjligheter. Den sista siffran kan sedan väljas godtyckligt bland talen $0, 1, \ldots, 9$ men med undantag för det tal som vi redan valt, dvs 9 möjligheter. Multiplikationsprincipen ger

$$9 \cdot 9 = 81 \text{ möjligheter.}$$

Första och sista siffran lika: detta fall fungerar precis som det första fallet och vi får även här 81 möjligheter.
Andra och sista siffran lika: Även här får vi samma antal möjligheter. Den första siffran kan väljas på 9 sätt och den gemensamma siffran på position två och tre kan även den väljas på 9 sätt vilket ger 81 möjligheter.
Sammanlagt får vi alltså

$$81 + 81 + 81 = 243$$

tresiffriga tal där precis två av siffrorna är lika.

c) Här får vi helt enkelt de möjliga talen $111, 222, 333, \ldots, 999$, dvs totalt 9 tal.
Som en extra koll kan vi notera att $648 + 243 + 9 = 900$, vilket svarar precis mot antalet heltal i intervallet $[100, 999]$.

3. Taylorutveckling ger

$$f(x) = (x^5 - \frac{1}{6}x^{15} + O(x^{25}))^4 - x^{20} + x^{30} =$$

$$(x^5)^4 - \binom{4}{1}\frac{1}{6}(x^5)^3 x^{15} + O(x^{40})) - x^{20} + x^{30}$$

$$= \frac{1}{3}x^{30} + O(x^{40})$$

av vilket framgår att $x = 0$ är en minpunkt.

4.Vektorn från en punkt Q med parametervärdet s på L_2 till en punkt P med parametervärdet t på L_1 fås enligt definitionerna till $\overrightarrow{QP} = (2t - s + 1, -t - s + 1, t - 2s + 1)$. Denna vektor skall vara ortogonal mot linjernas riktningsvektorer $\vec{N}_1 = (2, -1, 1)$ och $\vec{N}_2 = (1, 1, 2)$ vilket ger ekvationerna

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{N}_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(2t-s+1)+(-1)(-t-s+1)+(t-2s+1)=0$$

och

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2t-s+1)+(-t-s+1)+2(t-2s+1)=0$$

med lösningen $t = 0, s = \frac{2}{3}$ dvs $\overrightarrow{QP} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Det kortaste avståndet blir alltså $d = |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Integralen beräknas lämpligen i polära koordinater:

$$\iint_D (x^2+y^2)^2 \, dxdy = \begin{bmatrix} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \end{bmatrix} =$$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, r dr d\theta =$$

$$\left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta\right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^5 \, dr\right).$$

Den första integralen blir helt enkel π, medan den andra integralen blir

$$\int_1^{\sqrt{2}} r^5 \, dr = \left[\frac{1}{6}r^6\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6}.$$

Tillsammans ger detta

$$\iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy = \pi \cdot \frac{7}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

6. Den avbildning S_1 som speglar i planet $x = y$ har egenskapen att

$$S_1(e_x) = e_y, \quad S_1(e_y) = e_x, \quad S_1(e_z) = e_z,$$

vilket ger matrisen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den avbildning S_2 som speglar i planet $y = z$ har egenskapen att

$$S_2(e_x) = e_x, \quad S_2(e_y) = e_z, \quad S_2(e_z) = e_y,$$

vilket ger matrisen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den avbildning S_3 som speglar i planet $x = z$ har egenskapen att

$$S_3(e_x) = e_z, \quad S_3(e_y) = e_y, \quad S_3(e_z) = e_x,$$

vilket ger matrisen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi erhåller nu matrisen A för den sammansatta avbildningen genom att multiplicera ihop matriserna A_3, A_2 och A_1 (i denna ordning): $A = A_3A_2A_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

/Martin Tamm/190819