STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter LeFanu Lumsdaine
och Guillaume Brunerie

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2019, period AB
Fredag, 2019-03-22

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (8–10), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5).

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 Which of the following formulas are tautologies? Justify your answers.

(a) $(P_1 \wedge P_2) \to (P_1 \vee P_2)$

(b) $(P_1 \vee P_2) \to (P_1 \wedge P_2)$

2 Give the free variables of the following formulas:

(a) $(\forall x_3\, P_1(x_2, x_3)) \to x_3 \doteq x_2$ (b) $\neg\exists x_1\, \forall x_2\, f_3(x_2) \doteq x_1$

3 Give formulas φ, ψ (of either propositional or predicate logic) such that the theories $\{\varphi\}$ and $\{\psi\}$ are each consistent, but $\{\varphi, \psi\}$ is not consistent.

4 Several rules in the following derivation are mislabeled. Find which labels are wrong, and correct them.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\wedge E}{\neg\neg\varphi}\,RAA_2}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\,\to I_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^3 \qquad [\neg\varphi]^4}{\bot}\,\wedge E}{\varphi}\,RAA_4}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I_3}{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi}\,\leftrightarrow I$$

5 Show that

$$\forall x_1\ (P_1(x_1) \wedge P_2(x_1)) \ \approx\ (\forall x_1\, P_1(x_1)) \wedge (\forall x_1\, P_2(x_1)).$$

6 Which of the following hold? For each, give a derivation or a countermodel.

(a) $\neg(x_1 \doteq x_2) \vdash \neg(f_1(x_1) \doteq f_1(x_2))$ (b) $\neg(f_1(x_1) \doteq f_1(x_2)) \vdash \neg(x_1 \doteq x_2)$

7 Give the cases for the following rules in the proof of soundness for predicate logic.

(a) $\to I$

(b) $\forall E$

You may use, if necessary, the following substitution lemma: for any formula φ and term t, with t free for x_i in φ, and for any structure $\mathcal{A}$ and valuation v for $\mathcal{A}$,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}]}.$$

Problem part

8 Consider the formulas

$$\varphi_1 :\equiv \forall x_1\, \exists x_2\, \neg(x_1 \doteq x_2)$$
$$\varphi_2 :\equiv \exists x_3, x_4\, \neg(x_3 \doteq x_4)$$

(a) Give a derivation of $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

(b) Give an alternative argument showing that $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, without explicitly giving a derivation.

9 (a) Give a theory Γ_1 that has some finite model, but has no infinite models.

(b) Give a theory Γ_2 that has some infinite model, but has no finite models.

(c) Show that any theory with arbitrarily large finite models has some infinite model. You may use the fact that for each $n \in \mathbb{N}$ there is a formula σ_n which holds in any structure $\mathcal{A}$ exactly if $\mathcal{A}$ contains $\geq n$ distinct elements.

10 (a) Show that $\exists x_2\, \forall x_1\, \varphi \vdash \forall x_1\, \exists x_2\, \varphi$, for every formula φ.

(b) Give a formula φ such that $\forall x_1\, \exists x_2\, \varphi \vdash \exists x_2\, \forall x_1\, \varphi$ does not hold.

(c) Give a formula φ such that $\forall x_1\, \exists x_2\, \varphi \vdash \exists x_2\, \forall x_1\, \varphi$ holds, but $\exists x_2\, \forall x_1\, \varphi$ is not a tautology.

In each part, justify your answer.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Vilken av följande formler är tautologier? Motivera svaren.

(a) $(P_1 \wedge P_2) \to (P_1 \vee P_2)$

(b) $(P_1 \vee P_2) \to (P_1 \wedge P_2)$

2 Ange de fria variablerna i följande formler:

(a) $(\forall x_3\, P_1(x_2, x_3)) \to x_3 \doteq x_2$ (b) $\neg\exists x_1\, \forall x_2\, f_3(x_2) \doteq x_1$

3 Ange formler φ, ψ (antingen satslogiska eller predikatlogiska) så att teorierna $\{\varphi\}$ och $\{\psi\}$ är konsistenta, men $\{\varphi, \psi\}$ inte är konsistent.

4 Flera regler i följande härledning är felmärkta. Avgör vilka märken som är fel, och korrigera dem.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\wedge E}{\neg\neg\varphi}\,RAA_2}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\,\to I_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^3 \qquad [\neg\varphi]^4}{\bot}\,\wedge E}{\varphi}\,RAA_4}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I_3}{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi}\,\leftrightarrow I$$

5 Visa att

$$\forall x_1\ (P_1(x_1) \wedge P_2(x_1)) \ \approx\ (\forall x_1\, P_1(x_1)) \wedge (\forall x_1\, P_2(x_1)).$$

6 Vilka av följande gäller? För var och en, ange en härledning eller en motmodell.

(a) $\neg(x_1 \doteq x_2) \vdash \neg(f_1(x_1) \doteq f_1(x_2))$ (b) $\neg(f_1(x_1) \doteq f_1(x_2)) \vdash \neg(x_1 \doteq x_2)$

7 Ge fallen för följande regler i sundhetsbeviset för predikatlogik.

(a) $\to I$

(b) $\forall E$

Du får använda, om nödvändigt, följande substitutionslemma: För varje formel φ och term t, så att t är fri för x_i i φ, och för varje tolkning $\mathcal{A}$, v,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

Problemdel

8 Betrakta formlerna

$$\varphi_1 \coloneqq \forall x_1 \; \exists x_2 \; \neg(x_1 \doteq x_2)$$
$$\varphi_2 \coloneqq \exists x_3, x_4 \; \neg(x_3 \doteq x_4)$$

(a) Ange en härledning av $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

(b) Ange en alternativ resonemang som visar att $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, utan att ange explicit en härledning.

9 (a) Ange en teori Γ_1 som har någon ändlig modell, men som inte har någon oändlig modell.

(b) Ange en teori Γ_2 som har någon oändlig modell, men som inte har någon ändlig modell.

(c) Visa att om en teori har godtyckligt stora ändliga modeller, så har den någon oändlig modell. Du får använda att för alla $n \in \mathbb{N}$ finns det en formel σ_n som gäller i en struktur $\mathcal{A}$ precis om $\mathcal{A}$ innehåller $\geq n$ olika element.

10 (a) Visa att $\exists x_2 \, \forall x_1 \, \varphi \vdash \forall x_1 \, \exists x_2 \, \varphi$, för varje formel φ.

(b) Ange en formel φ så att $\forall x_1 \, \exists x_2 \, \varphi \vdash \exists x_2 \, \forall x_1 \, \varphi$ inte gäller.

(c) Ange en formel φ så att $\forall x_1 \, \exists x_2 \, \varphi \vdash \exists x_2 \, \forall x_1 \, \varphi$ gäller, men $\exists x_2 \, \forall x_1 \, \varphi$ är inte en tautologi.

I vardera del, motivera svaret.

——— Slut på provet ———