STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter LeFanu Lumsdaine
och Guillaume Brunerie

Re-exam / Omtentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2019, period AB
Onsdag, 2019-05-08

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 4 problems (8–11), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5).

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 State carefully the following natural deduction rules (including any necessary conditions):

(a) $\vee$-introduction (b) $\to$-introduction (c) RAA

2 Let $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ be the interpretations defined as follows:

i	$P_1^{\mathcal{V}_i}$	$P_2^{\mathcal{V}_i}$
1	0	0
2	1	0
3	0	1

(a) Give a formula which holds in $\mathcal{V}_2$ and $\mathcal{V}_3$, but not in $\mathcal{V}_1$.

(b) Give a formula which holds in $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, and $\mathcal{V}_3$, but is not a tautology.

3 Derive, or give a countermodel to, each of the following:

(a) $P_1 \wedge (P_2 \vee P_3) \vdash (P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$

(b) $P_1 \vee \neg P_2 \vdash P_2 \to P_1$

4 Give formulas φ and ψ such that $\varphi \models \psi$ but $\psi \not\models \varphi$. Justify your answer.

5 Give the free variables of the following formulas.

(a) $\forall x_1\, \exists x_2\, P_3(x_1, x_2, x_3)$

(b) $P_{10}(f_{12}(x_{17})) \to \exists x_{17}\, P_{21}(x_{17})$

6 (a) Find an error in the following derivation:

$$\dfrac{\exists x_1\ P_1(x_1) \qquad \dfrac{[P_1(x_1)]^1}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\ \forall I}{\forall x_1\ P_1(x_1)}\ \exists E_1$$

(b) Show that in fact there is no derivation of $\exists x_1\ P_1(x_1) \vdash \forall x_1\ P_1(x_1)$.

7 Give a derivation showing

$$\vdash\ \neg\,(x_1 \doteq x_2) \to \neg\,(x_2 \doteq x_1)$$

Problem part

8 Give the cases for the following rules in the proof of soundness for predicate logic.

(a) *RAA*

(b) $\forall$-introduction

You may use, if necessary, the following lemma: For any formula φ, structure $\mathcal{A}$, and valuations v_1, v_2 of variables in $\mathcal{A}$, if v_1 and v_2 agree on all free variables of φ, then $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v_1} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v_2}$.

9 Give derivations showing the following:

(a) $P_1 \to (P_2 \vee P_3) \vdash (P_1 \to P_2) \vee (P_1 \to P_3)$

(b) $(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3) \vdash P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)$

10 (a) Give the definition of *maximal consistency*, for a theory Γ of propositional logic.

(b) Recall: a theory Γ is called *complete* if for every formula φ, either $\Gamma \vdash \varphi$ or $\Gamma \vdash \neg\varphi$, and *deductively closed* if for every φ, if $\Gamma \vdash \varphi$ then $\varphi \in \Gamma$.

Show that if a theory Γ is consistent, complete, and deductively closed, then it is maximally consistent.

11 Work over the arity type $\langle\ ;\ 2\,\rangle$ (a single binary relation symbol). Consider the formulas

$$\begin{aligned}
\varphi_r &:= \forall x_1\ P_1(x_1, x_1) \\
\varphi_t &:= \forall x_1, x_2, x_3\ \ ((P_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2, x_3)) \to P_1(x_1, x_3)) \\
\varphi_a &:= \forall x_1, x_2\ \ (P_1(x_1, x_2) \to \neg P_1(x_2, x_1))
\end{aligned}$$

(a) Give a derivation showing $\varphi_a \vdash \neg\varphi_r$.

(b) Let $\mathcal{A}$ be the structure $\langle\, \{0,1\}\,;\ ;\ \{0,1\}^2\,\rangle$, i.e. $|\mathcal{A}| = \{0,1\}$ and $P_1^{\mathcal{A}} = |\mathcal{A}|^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Which of the formulas φ_r, φ_t, φ_a hold in $\mathcal{A}$?

(c) Show that the theory $\{\varphi_a, \neg\varphi_t\}$ is consistent.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Ange noggrant följande regler för naturlig deduktion (inklusive alla nödvändiga restriktioner):

(a) $\vee$-introduktion (b) $\rightarrow$-introduktion (c) RAA

2 Låt $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ vara tolkningarna som definierats enligt följande:

i	$P_1^{\mathcal{V}_i}$	$P_2^{\mathcal{V}_i}$
1	0	0
2	1	0
3	0	1

(a) Ge en formel som gäller i $\mathcal{V}_2$ och $\mathcal{V}_3$, men inte i $\mathcal{V}_1$

(b) Ge en formel som gäller i $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, och $\mathcal{V}_3$, men som inte är en tautologi.

3 Härled, eller ge en motmodell till, vardera av följande:

(a) $P_1 \wedge (P_2 \vee P_3) \vdash (P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$

(b) $P_1 \vee \neg P_2 \vdash P_2 \rightarrow P_1$

4 Ge formler φ och ψ så att $\varphi \models \psi$ men $\psi \not\models \varphi$. Redovisa svaret.

5 Ange de fria variablerna i följande formler.

(a) $\forall x_1 \, \exists x_2 \, P_3(x_1, x_2, x_3)$

(b) $P_{10}(f_{12}(x_{17})) \rightarrow \exists x_{17} \, P_{21}(x_{17})$

6 (a) Hitta ett fel i följande härledning:

$$\dfrac{\exists x_1 \; P_1(x_1) \qquad \dfrac{[P_1(x_1)]^1}{\forall x_1 \; P_1(x_1)}\,\forall I}{\forall x_1 \; P_1(x_1)}\,\exists E_1$$

(b) Visa att det finns faktiskt ingen härledning av $\exists x_1 \; P_1(x_1) \vdash \forall x_1 \; P_1(x_1)$.

7 Ge en härledning som visar

$$\vdash \; \neg\,(x_1 \doteq x_2) \rightarrow \neg\,(x_2 \doteq x_1)$$

Problemdel

8 Ge fallen för följande regler i sundhetsbeviset för predikatlogik.

(a) *RAA* (b) $\forall$-introduktion

Du får använda, om nödvändigt, följande lemma: För varje formel φ, struktur $\mathcal{A}$, och värderingar v_1, v_2 av variabler i $\mathcal{A}$, om v_1 och v_2 är överens om alla fria variabler av φ, så $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v_1} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v_2}$.

9 Ange härledningar som visar:

(a) $P_1 \to (P_2 \vee P_3) \vdash (P_1 \to P_2) \vee (P_1 \to P_3)$

(b) $(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3) \vdash P_1 \vee (P_2 \wedge P_3)$

10 (a) Ange definitionen av *maximal konsistens*, för en satslogisk teori Γ.

(b) Påminn: en teori Γ kallas *fullständigt* om för varje formel φ, antingen $\Gamma \vdash \varphi$ eller $\Gamma \vdash \neg\varphi$, och *sluten under härledning* om för varje φ, om $\Gamma \vdash \varphi$ så $\varphi \in \Gamma$.

Visa att om en teori Γ är konsistent, fullständig, och sluten under härledning, så är den maximalt konsistent.

11 Arbeta med ställighetstypen $\langle\ ;\ 2\ \rangle$ (en enda tvåställig relationssymbol). Betrakta formlerna

$$\begin{aligned}
\varphi_r &:= \forall x_1\ P_1(x_1, x_1) \\
\varphi_t &:= \forall x_1, x_2, x_3\ \ ((P_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2, x_3)) \to P_1(x_1, x_3)) \\
\varphi_a &:= \forall x_1, x_2\ \ (P_1(x_1, x_2) \to \neg P_1(x_2, x_1))
\end{aligned}$$

(a) Ange en härledning som visar att $\varphi_a \vdash \neg\varphi_r$.

(b) Låt $\mathcal{A}$ vara strukturen $\langle\, \{0,1\}\ ;\ ;\ \{0,1\}^2\, \rangle$, d.v.s. $|\mathcal{A}| = \{0,1\}$ och $P_1^{\mathcal{A}} = |\mathcal{A}|^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Vilka av formlerna φ_r, φ_t, φ_a gäller i $\mathcal{A}$?

(c) Visa att teorin $\{\varphi_a, \neg\varphi_t\}$ är konsistent.

——— Slut på provet ———