STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Guillaume Brunerie
och Menno de Boer

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2019, period CD
Fredag, 2019-05-24

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 7 problems (1–7), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (8–10), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5).

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

Written Exam (English)

Basic part

1 State precisely the following natural deduction rules (including any necessary conditions):

(a) ${\to}I$ (b) $\forall E$ (c) $\exists E$

2 Give an interpretation $\mathcal{A}$ where both $\neg(P_2 \to P_1)$ and $P_2 \wedge P_3$ are true, and an interpretation $\mathcal{A}'$ where they are both false.

3 (a) Find the error in the following derivation of $\exists x_1 P_1(x_1) \vdash \neg\neg P_1(x_1)$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x_1 P_1(x_1) \qquad \dfrac{[\neg P_1(x_1)]^1 \qquad [P_1(x_1)]^2}{\bot}\,{\to}E}{\bot}\,\exists E, 2}{\neg\neg P_1(x_1)}\,{\to}I, 1$$

(b) Show that there is no derivation of $\exists x_1 P_1(x_1) \vdash \neg\neg P_1(x_1)$.

4 Prove that $\Gamma = \{P_1 \leftrightarrow \neg P_1\}$ is inconsistent but that both $\Gamma_1 = \{P_1 \to \neg P_1\}$ and $\Gamma_2 = \{\neg P_1 \to P_1\}$ are consistent.

5 Give the free variables of the following formulas:

(a) $(\forall x_1(x_2 \doteq x_1)) \vee (\exists x_2(x_1 \doteq x_3))$ (b) $P_1(x_2) \wedge \neg\exists x_2 P_1(x_2)$

6 Give derivations in natural deduction showing:

(a) $\vdash (\neg\neg P_1) \to P_1$

(b) $(P_1 \to (P_2 \wedge P_3)) \vdash (P_1 \to P_2) \wedge (P_1 \to P_3)$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \varphi)$

7 Give the cases for the following rules in the proof of soundness for predicate logic:

(a) $\top I$

(b) $\vee E$

Problem part

8 (a) Which of the following are true for all formulas φ and ψ? Justify.

- $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash (\forall x\varphi) \to (\forall x\psi)$
- $(\forall x\varphi) \to (\forall x\psi) \vDash \forall x(\varphi \to \psi)$

(b) Give an example of formula φ such that $((\forall x\varphi) \to (\forall x\psi)) \approx \forall x(\varphi \to \psi)$ for every formula ψ.

9 Consider the signature $\langle\,;1\rangle$ (one unary function symbol f_1) and the following four formulas

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \forall x_0 (f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0)\\
\psi &:= \forall x_0 \exists x_1 (f_1(x_1) \doteq x_0)\\
\sigma &:= \forall x_0, x_1 (f_1(x_0) \doteq f_1(x_1) \rightarrow x_0 \doteq x_1)\\
\chi &:= \exists x_3, x_4 (\neg(x_3 \doteq x_4) \wedge \forall x_0 (x_0 \doteq x_3 \vee x_0 \doteq x_4))
\end{aligned}$$

The formula φ states that the function represented by f_1 is *involutive*, ψ states that it is *surjective* and σ states that it is *injective*.

(a) What does the formula χ state? In other words, in which interpretations is χ true?

(b) Give a derivation of $\varphi \vdash \psi \wedge \sigma$.

(c) Is $\psi, \sigma \vdash \varphi$ derivable? Justify.

(d) Show that $\psi, \sigma, \chi \vdash \varphi$ is derivable.

10 Consider the signature $\langle 2\,;\,\rangle$ (one binary relation symbol and no function symbols) and the interpretation $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}\,;<;\,\rangle$.

(a) Give a formula φ (with one free variable x_0) representing the statement

"x_0 is equal to 0".

This means that $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v} = 1$ if and only if $v(x_0) = 0$.

(b) Give a formula ψ (with two free variables x_0 and x_1) representing the statement

"x_1 is the successor of x_0".

This means that $[\![\psi]\!]^{\mathcal{A},v} = 1$ if and only if $v(x_1) = v(x_0) + 1$.

(c) Consider now the interpretation $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{R}\,;<;\,\rangle$. When are φ and ψ true in $\mathcal{A}'$?

——— End of exam ———

Skriftlig prov (Svenska)

Grundläggande del

1 Ange noggrant följande regler för naturlig deduktion (inklusive alla nödvändiga restriktioner):

(a) $\to I$ (b) $\forall E$ (c) $\exists E$

2 Ge en tolkning $\mathcal{A}$ i vilken både $\neg(P_2 \to P_1)$ och $P_2 \wedge P_3$ är sanna, och en tolkning $\mathcal{A}'$ i vilken både formler är falska.

3 (a) Hitta felet i följande härledning av $\exists x_1 P_1(x_1) \vdash \neg\neg P_1(x_1)$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x_1 P_1(x_1) \qquad \dfrac{[\neg P_1(x_1)]^1 \qquad [P_1(x_1)]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \to E}}{\bot}\,{\scriptstyle \exists E, 2}}{\neg\neg P_1(x_1)}\,{\scriptstyle \to I, 1}$$

(b) Visa att det finns ingen härledning av $\exists x_1 P_1(x_1) \vdash \neg\neg P_1(x_1)$.

4 Visa att $\Gamma = \{P_1 \leftrightarrow \neg P_1\}$ är inkonsistent men att både $\Gamma_1 = \{P_1 \to \neg P_1\}$ och $\Gamma_2 = \{\neg P_1 \to P_1\}$ är konsistenta.

5 Ange de fria variablerna i följande formler:

(a) $(\forall x_1(x_2 \doteq x_1)) \vee (\exists x_2(x_1 \doteq x_3))$ (b) $P_1(x_2) \wedge \neg\exists x_2 P_1(x_2)$

6 Ange härledningar som visar:

(a) $\vdash (\neg\neg P_1) \to P_1$

(b) $(P_1 \to (P_2 \wedge P_3)) \vdash (P_1 \to P_2) \wedge (P_1 \to P_3)$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \varphi)$

7 Ge fallen för följande regler i sundhetsbeviset för satslogik:

(a) $\top I$

(b) $\vee E$

Problemdel

8 (a) Vilka av följande gäller för varje φ och ψ? Motivera svaret.

- $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash (\forall x \varphi) \to (\forall x \psi)$
- $(\forall x \varphi) \to (\forall x \psi) \vDash \forall x(\varphi \to \psi)$

(b) Ge en exempel av en formel φ så att $((\forall x \varphi) \to (\forall x \psi)) \approx \forall x(\varphi \to \psi)$ för varje formel ψ.

9 Betrakta signaturen $\langle\,;1\rangle$ (en enställig funktionssymbol f_1) och följande fyra formler

$$
\begin{aligned}
\varphi &:= \forall x_0 (f_1(f_1(x_0)) \doteq x_0)\\
\psi &:= \forall x_0 \exists x_1 (f_1(x_1) \doteq x_0)\\
\sigma &:= \forall x_0, x_1 (f_1(x_0) \doteq f_1(x_1) \rightarrow x_0 \doteq x_1)\\
\chi &:= \exists x_3, x_4 (\neg(x_3 \doteq x_4) \wedge \forall x_0 (x_0 \doteq x_3 \vee x_0 \doteq x_4))
\end{aligned}
$$

Formeln φ säger att funktionen som representeras av f_1 är *involutiv*, ψ säger att det är *surjektiv* och σ säger att det är *injektiv*.

(a) Vad säger formeln χ? Med andra ord, i vilka tolkningar är χ sant?

(b) Ge en härledning av $\varphi \vdash \psi \wedge \sigma$.

(c) Är $\psi, \sigma \vdash \varphi$ härledningsbar? Motivera svaret.

(d) Visa att $\psi, \sigma, \chi \vdash \varphi$ är härledningsbar.

10 Betrakta signaturen $\langle 2\,;\,\rangle$ (en tvåställig relationssymbol och inga functionssymboler) och tolkningen $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}\,;\,<\,;\,\rangle$.

(a) Ge en formel φ (med en fri variabel x_0) som representerar påståendet

”x_0 är lika med 0”.

Det betyder att $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v} = 1$ om och endast om $v(x_0) = 0$.

(b) Ge en formel ψ (med två fria variabler x_0 och x_1) som representerar påståendet

”x_1 är efterföljare till x_0”.

Det betyder att $[\![\psi]\!]^{\mathcal{A},v} = 1$ om och endast om $v(x_1) = v(x_0) + 1$.

(c) Betrakta nu tolkningen $\mathcal{A}' = \langle \mathbb{R}\,;\,<\,;\,\rangle$. När är φ och ψ sanna i $\mathcal{A}'$?

——— Slut på provet ———