

Lösningar

15 mars 2015

Uppgift 1

Låt N beteckna antalet händelser under observationsperioden. Givet T gäller att $N \sim \text{Po}(T)$, och genom att betinga på T får vi:

a) $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N|T]] = \mathbb{E}[T] = 1;$

b) $\text{Var}(N) = \mathbb{E}[\text{Var}(N|T)] + \text{Var}(\mathbb{E}[N|T]) = \mathbb{E}[T] + \text{Var}(T) = 1 + \frac{2^2}{12} = \frac{4}{3};$

c) $P(N=0) = \int_0^\infty P(N=0|T=t)f_T(t)dt = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}).$

Uppgift 2

a) I denna kedja kommunicerar alla tillstånd med varandra. Kedjan är alltså irreducibel, dvs består av en enda klass, som då måste vara rekurrent (eftersom kedjan har ändligt tillståndsrum). Den asymptotiska fördelningen $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ fås som lösningen till ekvationssystemet $\pi P = \pi$ tillsammans med kravet att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$\begin{cases} 0.65\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.45\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{cases}$$

Detta ger $p_1 = 20/39 \approx 0.513$, dvs kedjan befinner sig i långa loppet i tillstånd 1 51.3% av tiden.

b) Kedjan består av klasserna $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ och $\{5, 6\}$ (ses bäst genom att rita upp en övergångsgraf). Här är klassen $\{2, 3, 4\}$ transient eftersom man

efter ändlig tid lämnar klassen och därefter aldrig återvänder. Klasserna $\{1\}$ och $\{5, 6\}$ är rekurrenta (absorberande), eftersom det inte går att lämna dessa klasser. Klassen $\{1\}$ har period 1, $\{2, 3, 4\}$ har period 3 och $\{5, 6\}$ har period 2.

Uppgift 3

a) Det totala antalet bokningar under 2 timmar är Poissonfördelat med parameter $4 \cdot 2 = 8$.

b) Dubbelrumsbokningarna utgör en Poissonprocess med intensitet $4 \cdot 0.75 = 3$. Antalet dubbelrumsbokningar under 2 timmar är alltså Poissonfördelat med parameter $3 \cdot 2 = 6$.

c) Tiden mellan den första och den andra dubbelrumsbokningen är exponentialfördelad med parameter 3, dvs sannolikheten att den överstiger 0.5 timme ges av $e^{-3 \cdot 0.5} = e^{-1.5}$.

d) Låt $N(t)$ beteckna antalet bokningar i tidsintervallet $[0, t]$. Genom att utnyttja att Poissonprocessen har oberoende och stationära inkrement (andra likheten) och att $N(t) \sim \text{Po}(4t)$ (tredje likheten) får vi den sökta sannolikheten som:

$$\begin{aligned} P(N(0.5) = 2 | N(1) = 2) &= \frac{P(N(0.5) = 2 \cap N(1) - N(0.5) = 0)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N(0.5) = 2)P(N(0.5) = 0)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{\frac{2^2}{2!}e^{-2}e^{-2}}{\frac{4^2}{2!}e^{-4}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Uppgift 4

a) En förgreningsprocess dör säkert ut omm det förväntade antalet barn per individ inte överstiger 1. Här är det förväntade antalet barn per individ $2p$ och processen dör alltså säkert ut omm $p \leq 1/2$.

b) Låt p_j ($j = 0, 1, 2$) beteckna sannolikheten att en Binomial(2, 0.6)-variabel antar värdet j . Sannolikheten π_0 att kolonin dör ut då $p = 0.6$ ges av den minsta roten till ekvationen $\pi_0 = p_0 + p_1\pi_0 + p_2\pi_0^2$, dvs $\pi_0 = 0.44$.

c) Genom att betinga på antalet individer i generation 1 får vi:

$$P(X_2 = 0) = \sum_{j=0}^2 P(X_2 = 0 | X_1 = j) p_j = \sum_{j=0}^2 p_0^j p_j = 0.25.$$

d) Processen dör först ut om den första individen inte får några barn, vilket inträffar med sannolikhet 0.5. Om den första individen istället får fyra barn, så dör processen ut om alla processer utgående ifrån dessa fyra barn dör ut. Sannolikheten att en given process dör ut är 0.44 enligt beräkningen i (b), och eftersom processerna utvecklar sig oberoende av varandra, så blir den totala sannolikheten för utdöende $0.5 + 0.5 \cdot 0.44^4 = 0.52$.

Uppgift 5

Systemet kan modelleras som en Markovkedja i kontinuerlig tid med tre tillstånd 0,1,2, där 0 representerar att maskinen är ledig, 1 att maskinen används och 2 att maskinen rengörs. De möjliga övergångarna är $0 \rightarrow 1$ (intensitet λ), $1 \rightarrow 2$ (intensitet μ_1) och $2 \rightarrow 0$ (intensitet μ_2). Kedjan är ändlig och irreducibel, vilket betyder att det existerar en gränsfördelning $\{p_n\}$. Vi söker p_0 . Enligt balansekvationerna har vi att

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu_2 p_2 \\ \mu_1 p_1 &= \lambda p_0 \\ \mu_2 p_2 &= \mu_1 p_1, \end{aligned}$$

vilket tillsammans med villkoret att $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ger

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} \right) = 1.$$

Alltså får vi $p_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$.

Uppgift 6

a) Systemet utgör en M/M/1-kö med tillströmningsintensitet $\lambda = 1$ kund per timme och betjäningintensitet $\mu = 2$ kunder per timme. Vi har i kursen analyserat ett sådant system och sett att den genomsnittliga tiden W i systemet för en kund ges av $1/(\mu - \lambda) = 1$ timme. Den genomsnittliga betjäningstiden är $1/\mu = 1/2$ timme, och den genomsnittliga kötiden W_Q blir alltså $1 - 1/2 = 1/2$ timme (30 minuter).

b) Vi har nu att göra med en M/M/2-kö. Denna utgör en födelse-dödsprocess med $\lambda_n = 1$ för alla n , $\mu_1 = 2$ och $\mu_n = 4$ för $n \geq 2$ (om båda terminaler är upptagna är tiden tills någon av dess två kunder lämnar systemet $\text{Exp}(4)$). Med $r_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ för $n \geq 1$ så ges den asymptotiska fördelningen av $p_n = r_n p_0$ och $p_0 = (1 + \sum_1^\infty r_n)^{-1}$. Vi har att

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

vilket ger $p_0 = \frac{3}{5}$ och $p_n = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ för $n \geq 1$. Den genomsnittliga totala tiden W som en kund tillbringar i systemet ges av λL där L är det genomsnittliga antalet kunder L i systemet:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{8}{15}.$$

Den genomsnittliga betjäningstiden är fortfarande $1/2$ timme. Den genomsnittliga kötiden blir alltså $\frac{8}{15} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$. Kötiden har alltså minskat från 30 minuter till 2 minuter.