STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
15 mars 2015

Lösningar

15 mars 2015

Uppgift 1

a) N är för-första-gången-fördelad med parameter p, dvs $P(N = n) = (1-p)^{n-1}p$.

b) Givet att $N = n$ så har vi att $X \sim \text{Bin}(n, p)$, och genom att betinga på N får vi $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N]] = \mathbb{E}[Np] = \frac{1}{p} \cdot p = 1$.

c) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|N]) = \mathbb{E}[Np(1-p)] + \text{Var}(Np) = \frac{1}{p} \cdot p(1-p) + \frac{1-p}{p^2}p^2 = 2(1-p)$.

Uppgift 2

a) Övergångmatrisen blir

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6+c & 0.4-c \\ 0 & 0.6+c & 0.4-c \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Elementen i en övergångsmatris är sannolikheter och ska ligga mellan 0 och 1. Alltså måste vi ha att $c \in [-0.6, 0.4]$. (Det måste även gälla att radsummorna är 1, men det är uppfyllt för alla val av c.)

c) För $c \in [-0.6, 0.4)$ kommunicerar alla tillstånd med varandra, dvs kedjan är irreducibel och består av en enda klass som då måste vara rekurrent. För $c = 0.4$ är kedjan reducibel och varje tillstånd utgör en egen klass, där $\{0\}$ och $\{2\}$ är transienta och $\{1\}$ är rekurrent (absorberande).

d) Låt $\mathbb{P}^{(n)}$ beteckna övergångsmatrisen i n steg, dvs på rad i i kolumn j finner vi $P(X_n = j|X_0 = j)$. Vi har då att $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$. För $c = 0$ och $n = 2$ fås

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.56 & 0.24 \\ 0.2 & 0.56 & 0.24 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 3

a) Det totala inflödet av samtal är en Poissonprocess med intensitet 2.5 samtal per minut. Tiden till den första händelsen i en sådan process är exponentialfördelad med paramter 2.5, och sannolikheten att den överstiger en minut ges alltså av $e^{-2.5} \approx 0.082$.

b) Tiden T_f till det första samtalet från en företagskund är exponentialfördelad med parameter 0.5 och tiden T_p till det första samtalet från en privatkund är exponentialfördelad med paramter 2. Den sökta sannolikheten ges av $P(T_f < T_p) = \frac{0.5}{0.5+2} = 0.2$.

c) Enligt minneslösheten hos Poissonprocessen är sannolikheten att nästa samtal är från en företagskund $P(T_p < T_f) = \frac{2}{0.5+2} = 0.8$, och eftersom en Poissonprocess har oberoende inkrement blir sannolikheten att de fem första samtalen är från privatkunder $0.8^5 \approx 0.33$.

Uppgift 4

a) Smittspridningen approximeras lämpligen av en förgreningsprocess med Poisson($10p$)-fördelad avkomma. Individerna i generation n består här av de som smittats av individerna i generation $n - 1$.

b) Låt X_n beteckna antalet smittade individer efter n dagar. Om den förväntade avkomman är μ och variansen σ^2 så gäller då att $E[X_n] = \mu^n$ och $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ ($\mu \neq 1$) respektive $\mathrm{Var}(X_n) = n\sigma^2$ ($\mu = 1$). I vårat fall har vi $\mu = \sigma^2 = 10p$, vilket ger $E[X_5] = (10p)^5$ och $\mathrm{Var}(X_5) = \frac{(10p)^{10}-(10p)^5}{10p-1}$ ($p \neq 0.1$) respektive $\mathrm{Var}(X_5) = 5$ ($p = 0.1$).

c) En förgreningsprocess dör ut med sannolikhet 1 om varje individ genererar i genomsnitt högst ett barn. Här är det förväntade antalet nysmittade som en smittad ger upphov till $10p$, dvs processen dör ut med sannolikhet 1 omm $10p \leq 1$, dvs $p \leq 0.1$.

d) För $p = 0.3$ är avkomman Poisson(3)-fördelad. Låt p_j beteckna sannolikheten att en individ ger upphov till j nysmittade individer, dvs $p_j = 3^j e^{-3}/j!$. Sannolikheten π för utdöende ges då av den minsta positiva roten till ekvationen $p = \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j p_j$. Vi har att

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi^j p_j = e^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(3p)^j}{j!} = e^{-3} e^{3p} = e^{3(p-1)},$$

och får alltså ekvationen $p = e^{3(p-1)}$ (som kan lösas numeriskt och ger $p = 0.056$).

Uppgift 5

Låt $X(t)$ vara antalet kunder i systemet vid tid t. Processen $X(t)$ hoppar två steg uppåt när det kommer en grupp om två kunder och ett steg nedåt då en kund lämnar systemet. Processen är således *inte* en födelse-dödsprocess. Eftersom ankomstprocessen har oberoende ökningar och eftersom exponentialfördelningen saknar minne så är $X(t)$ dock en Markovprocess. Tillståndsrummet är $\{0, 1, 2\}$ och möjliga övergångar är $0 \to 2$ (med intensitet 0.3), $1 \to 0$ (med intensitet 1) och $2 \to 1$ (med intensitet 1). Kedjan är ändlig och irreducibel, vilket betyder att det existerar en gränsfördelning. Intensitetsmatrisen (där vi skriver intensiteterna med vilka vi rör oss mellan tillstånden utanför diagonalen, och den sammanlagda intensiteten med vilken vi lämnar tillståndet med omvänt tecken på diagonalen) blir då

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0.3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gränsfördelningen $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ bestäms av $\pi Q = 0$ (balansekvationerna) tillsammans med villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, vilket ger $\pi = (0.625, 0.1875, 0.1875)$.

Uppgift 6

Tillstånden O_1 och O_2 är transienta och tillstånden D och K är rekurrenta (absorberande). Övergångmatrisen kan skrivas som

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

där $\mathbb{P}_{\mathbb{T}} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4-\alpha \\ 1/8 & 3/4 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar mellan de transienta tillstånden O_1 och O_2 och $\mathbb{R} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar från de transienta till de absorberande tillstånden.

a) Tiden som processen tillbringar i de transienta tillstånden innan den till slut hamnar i något av de absorberande tillstånden ges av elementen i matrisen $\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}$. Vi får

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1/4 & \alpha - 3/4 \\ -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{32}{1+4\alpha} \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4-\alpha \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Eftersom kedjan startar i tillstånd O_1, så ges det genomsnittliga antalet tidssteg som kedjan tillbringar i de transienta tillstånden innan absorption av

$$s_{1,1} + s_{1,2} = \frac{32(1-\alpha)}{1+4\alpha}.$$

Eftersom varje tidssteg tar 1 timme, så är detta också den genomsnittliga tiden (räknat i timmar) som en person tillbringar på festivalområdet innan hen lämnar området.

b) Sannolikheten att absorberas i tillstånd D om man startar i tillstånd O_1 ges av

$$(\mathbb{SR})_{1,21} = \alpha s_{1,1} = \frac{8\alpha}{1+4\alpha}.$$

Ska denna sannolikhet vara större än $1/2$ får vi att $\alpha \geq 1/12$. Vi noterar att vi även måste ha $\alpha \leq 3/4$ (för att alla element i övergångsmatrisen ska ligga mellan 0 och 1). Vi får alltså $\alpha \in [1/12, 3/4]$.