MT5002 – Sannolikhetsteori II – (hem-)tentamen

Datum Onsdag 3 juni, 2020
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Kursboken samt annan litteratur, bekräkningsprogram, etc. Samarbete eller annan assistens av någon person är ej tillåten.
Bedömning Tentamen består av en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng var. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen, vilken bestämmer betyget. För högre betyg (A och B) krävs, utöver uppnådd poängnivå, att lösningarna som helhet bedöms välskrivna och välmotiverade. Ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng, vilka räknas in i den betygsgrundande delen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel					14
Betygsgrundande del	40	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Basdel

Uppgift 1. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthetsfunktion ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2} \quad \text{för } x \geq 0, y \geq 0.$$

Bestäm marginaltätheterna och avgör om X och Y är oberoende eller ej. (4p)

Uppgift 2. Låt X vara Poissonfördelad med parameter λ och låt Y givet $X = n$ vara binomialfördelad med parametrar n och p. Beräkna $\mathbb{E}[Y^2]$. (4p)

Uppgift 3. Låt X vara en stokastisk variabel vars momentgenererande funktion uppfyller $\psi_X(1) = 2$ och $\psi_X(2) = 4$.

(a) Visa att $Y = e^X$ är konstant. (2p)

(b) Visa att $\psi_X(t) = 2^t$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (2p)

Uppgift 4. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$. Sätt $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ och visa att $n(1 - M_n)$ konvergerar i fördelning, då $n \to \infty$, mot en exponentialfördelning med väntevärde 1. (4p)

Uppgift 5. Avgör vilka av följande matriser som utgör kovariansmatriser för någon slumpvektor. Motivera ditt svar. (4p)

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Betygsgrundande del

Uppgift 6. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthetsfunktion ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/3 & \text{för } 0 < x \leq 2, 0 < y \leq 1, \\ 1/12 & \text{för } 0 < x \leq 2, 1 < y \leq 3. \end{cases}$$

(a) Avgör huruvida X och Y är oberoende eller ej. (5p)

(b) Bestäm de momentgenererande funktionerna för X, Y och $X + Y$. (5p)

Uppgift 7. Låt $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ vara en multivariat normalfördelad slumpvektor med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givna av

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Låt $U = (X_1, X_2 - X_1)'$ och $V = (X_3 - X_4, X_4)'$.

(a) Bestäm fördelningarna för U och V. (4p)

(b) Avgör om U och V har täthetsfunktioner och ange i så fall dessa. (3p)

(c) Bestäm den betingade fördelningen för $X_3 - X_4$ givet $X_4 = 0$. (3p)

Uppgift 8. Adam, Berit och Cesar delar en cylindrisk tårta med radie 1. Adam tar för sig först. Han delar tårtan genom att först skära tårtan från dess mittpunkt till en godtyckligt vald punkt på randen, för att sedan välja en likformigt fördelad punkt på randen och skär tårtan på nytt från dess mittpunkt till denna punkt. Adam tar den bit av tårtan som ligger moturs mellan den godtyckligt valda punkten och den likformigt valda punkten. Berit delar den återstående biten genom att på nytt välja en punkt likformigt på randen av den återstående delen av tårtan och skär från mittpunkten. Cesar får den återstående biten. Beräkna förväntad andel av tårtan som tillfaller var och en. (10p)
Förtydligande: Alla snitt sker med tårtan sedd från ovan. Adams likformigt valda snitt sker oberoende av det godtyckliga snittet.

Uppgift 9. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler som antar värdena $+1$ och -1 med lika sannolikhet. Sätt $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ för heltal $k \geq 1$. För heltal $n \geq 1$, låt $Y_n(t)$ ange den (slumpmässiga) funktion som för $t = k/n$ antar värdet $S_k/\sqrt{n}$, samt på intervallet $[k/n, (k+1/n)]$ interpolerar linjärt mellan $S_k/\sqrt{n}$ och $S_{k+1}/\sqrt{n}$. Med andra ord gäller det för $n \geq 1$ och $t > 0$ att

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor tn \rfloor} + \frac{tn - \lfloor tn \rfloor}{\sqrt{n}} X_{\lfloor tn \rfloor + 1}.$$

Fixera $t > 0$ och visa att $Y_n(t) \xrightarrow{d} N(0, t)$ då $n \to \infty$. (10p)
Förtydligande: $\lfloor x \rfloor$ anger heltalsdelen av x, dvs största heltal mindre än x.