Lösningar (hem-) tentamen Sanno II (3 juni, 2020)

1 Marginaltätheten för X beräknas enligt följande

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)/2}\,dy$$
$$= xe^{-x^2/2}\left[-e^{-y^2/2}\right]_0^{\infty} = xe^{-x^2/2} \quad \text{för } x \geq 0.$$

Av symmetriskäl är även $f_Y(y) = ye^{-y^2/2}$ för $y \geq 0$. 2p

X och Y är oberoende eftersom för $x, y \geq 0$ gäller

$$f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2} = \left[xe^{-x^2/2}\right]\left[ye^{-y^2/2}\right] = f_X(x)\,f_Y(y),$$

och både VL och HL är noll för övriga x och y. 2p

2 Låt $X \sim Po(\lambda)$ och $Y \mid X=n \sim Bin(n,p)$. Enligt sats gäller

$$\mathbb{E}[Y^2] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2 \mid X]] \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y^2 \mid X=n]\,\mathbb{P}(X=n) \quad 1p$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(Var(Y \mid X=n) + \mathbb{E}[Y \mid X=n]^2\right)\mathbb{P}(X=n)$$

$Y|X=n \sim Bin(n,p)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(np(1-p) + p^2n^2\right)\mathbb{P}(X=n) \quad 1p$$
$$= p(1-p)\,\mathbb{E}[X] + p^2\,\mathbb{E}[X^2]$$
$$= p(1-p)\,\mathbb{E}[X] + p^2\left(Var(X) + \mathbb{E}[X]^2\right)$$

$X \sim Po(\lambda)$

$$= p(1-p)\lambda + p^2(\lambda + \lambda^2) \quad 1p$$
$$= p\lambda\left[(1-p) + p(1+\lambda)\right]$$
$$= p\lambda(1+p\lambda) \quad 1p$$

3 (a) En stokastisk variabel är konstant om och endast om dess varians är noll. Vi får

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[e^{2X}] - \mathbb{E}[e^X]^2 = \psi_X(2) - \psi_X(1)^2 = 0.$$

2p

(b) MGF för X fås av följande

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}] = \mathbb{E}[Y^t] = Y^t = 2^t$$

ty Y konstant och därmed $Y = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^X] = \psi_X(1) = 2$. 2p

4 Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende likf $[0,1]$-fördelade. Observera att

$$\mathbb{P}(M_n \le x) \underset{\text{oberoende}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le x) \cdots \mathbb{P}(X_n \le x) = x^n \quad \text{för } x \in [0,1].$$

2p

Därmed får vi för $x \ge 0$

$$\mathbb{P}(n(1-M_n) \ge x) = \mathbb{P}\left(M_n \le 1-\frac{x}{n}\right) \underset{\text{förutsatt } n \text{ stort}}{=} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$$

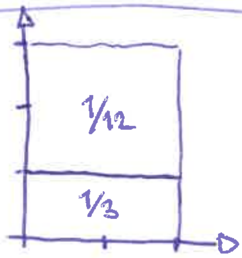
2p

då $n \to \infty$. HL motsvarar $1-F_Y(x)$ för en exp(1)-fördelad variabel Y.

5 En kovariansmatris är symmetrisk per definition, så Δ_3 går bort. Den är dessutom positivt semidefinit, vilket medför att determinanten är icke-negativ. Därmed går Δ_1 bort. 2p

De övriga är symmetriska och positivt semidefinita, och vi har sett att det i sådana fall alltid finns t.ex. en multivariat normalfördelning med den kovariansstrukturen. 2p

6 (a) Vi tar först fram marginalfördelningarna



$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dy + \int_1^3 \frac{1}{12}\,dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

för $x \in [0,2]$. För $y \in [0,1]$ får vi

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{2}{3}$$

och för $y \in (1,3]$ får vi

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{12}\,dx = \frac{1}{6}$$

3p

För oberoende verifierar vi att $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \ \forall x,y$.

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} & \text{för } x \in [0,2],\ y \in (0,1] \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} & \text{för } x \in (0,2],\ y \in (1,3]. \end{cases}$$

2p

Alltså är X och Y oberoende.

(b) MGF beräknas enligt följande $(t \ne 0)$

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^2 e^{tx} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{e^{tx}}{2t}\right]_0^2 = \frac{e^{2t}-1}{2t}$$

$$\psi_Y(t) = \int_0^1 \frac{2}{3} e^{ty}\,dy + \int_1^3 \frac{1}{6} e^{ty}\,dy = \left[\frac{2e^{ty}}{3t}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{ty}}{6t}\right]_1^3 = \frac{4e^t - 4 + e^{3t} - e^t}{6t}$$

$$\psi_{X+Y}(t) \underset{\text{oberoende, sats}}{=} \psi_X(t)\psi_Y(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t} \cdot \frac{e^{3t}+3e^t-4}{6t} = \frac{e^{5t}+2e^{3t}-4e^{2t}-3e^t+4}{12t^2}$$

5p

7 ⓐ Vi noterar att vi kan uttrycka $U = AX$ och $V = BX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2p

Enligt sats gäller $U \sim N(A\mu, A\Lambda A')$ samt $V \sim N(B\mu, B\Lambda B')$, där

$$\Lambda_U = A\Lambda A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_V = B\Lambda B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 2p

ⓑ Täthet existerar om determinanten är strikt positiv.

$$\det(A\Lambda A') = 1 - 1 = 0$$ 1p

$$\det(B\Lambda B') = 4 - 1 = 3$$

Alltså har V en täthet, men ej U. Tätheten för V ges av

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\det(\Lambda_V)} \exp\left(-\frac{1}{2} x' \Lambda_V^{-1} x\right) \qquad \text{för } x \in \mathbb{R}^2.$$

Vi beräknar

$$\Lambda_V^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda_V} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vilket ger formeln

$$f_V(x_1, x_2) = \frac{1}{6\pi} \exp\left(-\frac{1}{6}\left[2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2\right]\right).$$ 2p

ⓒ Vi vill alltså bestämma den betingade tätheten

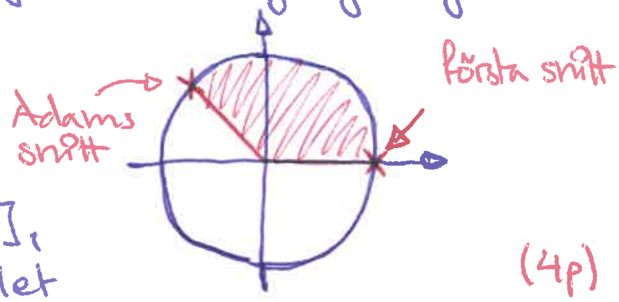
$$f_{V_1|V_2=0}(x) = \frac{f_{V_1,V_2}(x,0)}{f_{V_2}(0)} = \frac{1}{6\pi f_{V_2}(0)} \exp\left(-\frac{1}{6}[2x^2]\right)$$

$$= \text{konstant} \cdot e^{-x^2/2(3/2)}.$$ 2p

Alltså tätheten för en $N(0, 3/2)$-fördelning. 1p

$\boxed{8}$ Notera att denna uppgift är en variant på ett exempel från kursen där en pinne bryts två gånger vid likformigt valda punkter.

Eftersom det första snittet är godtyckligt och oberoende av det andra snittet, så kan vi anta att tårtan är orienterad så att dess mittpunkt finnes i origo och den godtyckligt valda punkten motsvarar $(1,0)$.



Adams likformigt valda punkt kan därmed representeras med en likformigt vald vinkel $\theta_A \in [0, 2\pi]$, och Adams bit motsvarar intervallet $[0, \theta_A]$. Andelen av tårtan som tillfaller Adam är därmed $\frac{\theta_A}{2\pi}$. (4p)

Berits snitt motsvarar en likformigt vald vinkel θ_B i $[\theta_A, 2\pi]$. Berits andel är alltså $\frac{\theta_B - \theta_A}{2\pi}$. Förväntade andelar för Adam och Berit: 3p

$$\mathbb{E}\left[\frac{\theta_A}{2\pi}\right] = \int_0^{2\pi} \frac{x}{(2\pi)^2} dx = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{likf. fördelningar}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\theta_B - \theta_A}{2\pi}\right] \underset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{\theta_B - \theta_A}{2\pi} \,\Big|\, \theta_A\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{2\pi - \theta_A}{2 \cdot 2\pi}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Cesars förväntade andel blir $1/4$ eftersom måste summera till 1. 3p

$\boxed{9}$ Eftersom $X_1, X_2, \ldots$ är iid väntevärde noll och varians 1 så ger centrala gränsvärdessatsen att $\frac{1}{\sqrt{k}} S_k \xrightarrow{d} N(0,1)$ och därmed att

$$\frac{1}{\sqrt{\lfloor tn \rfloor}} S_{\lfloor tn \rfloor} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{då } n \to \infty \qquad 3p$$

för varje fixt $t > 0$.

Eftersom $X_1, X_2, \ldots$ är ± 1-värda så gäller också att

$$\frac{tn - \lfloor tn \rfloor}{\sqrt{n}} |X_{\lfloor tn \rfloor + 1}| = \frac{tn - \lfloor tn \rfloor}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{då } n \to \infty \qquad 2p$$

(nästan säkert, i sannolikhet, etc.) Genom omskrivning får vi

$$Y_n(t) = \underbrace{\frac{\sqrt{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}}}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lfloor tn \rfloor}} S_{\lfloor tn \rfloor}}_{B_n} + \underbrace{\frac{tn - \lfloor tn \rfloor}{\sqrt{n}} X_{\lfloor tn \rfloor + 1}}_{C_n}$$

Genom att applicera Cramér–Slutskys sats två gånger får vi

$$a_n B_n \xrightarrow{d} \sqrt{t} \cdot N(0,1) \quad \text{samt} \quad a_n B_n + C_n \xrightarrow{d} \sqrt{t} \cdot N(0,1) + 0 \qquad 4p$$

då $n \to \infty$. Eftersom $\sqrt{t} \cdot N(0,1) = N(0,t)$ är vi klara. 1p